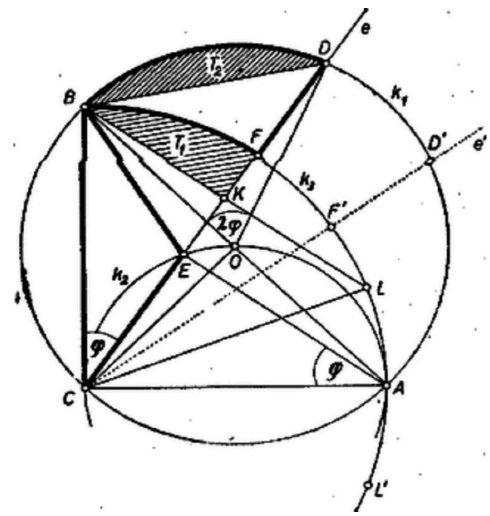
I. megoldás. Legyen a három körív (szerkesztésük sorrendjében) k_1, k_2, k_3, a k_1 középpontja O, a metsző e egyenesnek BC-vel bezárt szöge $BCD\sphericalangle = \varphi$, végül B-nek vetülete e-re K, és e-re vonatkozó tükörképe L. k_1-et egész körré kiegészítve átmegy C-n. L a k_3-on, vagy meghosszabbításán, a C körül CA sugárral írt kör kerületén van. – Megmutatjuk, hogy a kérdéses idomok mindegyike egyenlő területű a BKD háromszöggel.

A kerületi szögek tétele szerint k_1-ben $BDC\sphericalangle = BAC\sphericalangle = 45°$, ezért a BDK derékszögű háromszög egyenlő szárú: $KD = BK$. Másrészt a CBK és ACE derékszögű háromszögek egybevágók – mert k_2 az AC átmérő fölötti Thalész-kör, így EAC és KCB merőleges szárú hegyesszögek, és $AC = BC$ –, ezért $CE = BK = KD$. Így az egyenlő alapú és közös magasságú BKD és BCE háromszögek területe valóban egyenlő.



A DF szakasz és a BD, BF ívek határolta T idomból úgy nyerhetjük a BDK háromszöget, hogy kiegészítjük a BK, KF szakaszok és a BF is határolta T_1 idommal a BK és KD szakaszok és a BD ív határolta idommá, majd ebből elhagyjuk a BD húr és a BD ív közti (kisebb) T_2 körszeletet. Elegendő tehát még azt megmutatnunk, hogy T_1 és T_2 területe egyenlő. A T_2-höz tartozó BOD középponti szög egyenlő a $BCD = \varphi$ szög 2-szeresével, és így egyenlő a BCL szöggel. A T_1 viszont az utóbbi szöghöz mint középponti szöghöz k_3-ban tartozó $BFL = T_3$ körszelet fele. Ezért a T_2 és T_3 körszeletek hasonlók, így területük aránya egyenlő a megfelelő körsugarak négyzetének $BO^2 : BC^2$ arányával. Ennek értéke $1/2$, mert a BOC derékszögű háromszög egyenlő szárú, ezért T_2 területe fele akkora, mint T_3-é, tehát egyenlő T_1 területével. Ezt akartuk bizonyítani.

II. megoldás. A fenti jelöléseket ezután is használjuk, továbbá hosszúságegységnek vesszük az $AC = BC$ befogót. ÍgyBCE területe

$$\frac{1}{2} \cdot CE \cdot BK = \frac{1}{2} AC \sin\varphi \cdot BC \sin\varphi = \frac{1}{2}\sin^2\varphi. \tag{1}$$

A másik vizsgálandó idomot úgy kapjuk, hogy a BDO körcikkből és a BOC háromszögből álló idomból $\varphi \le 45°$ esetén elvesszük – ha pedig $45° < \varphi \le 90°$, akkor hozzá tesszük – a DOC háromszöget, végül a nyert idomból elvesszük a BFC körcikket. Jelöljük a BDO körcikk, a BOC háromszög, a DOC háromszög és a BFC körcikk területét rendre t_1, t_2, t_3, t_4-gyel.

A körcikkek sugarának négyzete $DO^2 = 1/2$, ill. $BC^2 = 1$, középponti szögük 2φ, ill. φ, így

$$t_1 = \frac{\frac{1}{2}\pi \cdot 2\varphi}{360°} = \frac{\pi\varphi}{360°}, \qquad t_4 = \frac{\pi\varphi}{360°}.$$

Másrészt $t_2 = 1/4$. Az ODC háromszög egyenlő szárú, az alapján levő szög $DCO\sphericalangle = 45° - \varphi$, ha $\varphi \le 45°$ és $DCO\sphericalangle = \varphi - 45°$, ha $45° < \varphi \le 90°$, így a szárak közti szög $180° - 2(45° - \varphi) = 90° + 2\varphi$, ill. $180° - 2(\varphi - 45°) = 270° - 2\varphi$, ennélfogva

$$t_3 = \frac{1}{2}DO^2 \sin(90° + 2\varphi) = \frac{1}{4}\cos 2\varphi, \text{ ha } \varphi \le 45°, \text{ és}$$
$$t_3 = \frac{1}{2}DO^2 \sin(270° - 2\varphi) = -\frac{1}{4}\cos 2\varphi, \text{ ha } 45° < \varphi \le 90°.$$

Mivel a t_3 terület az első esetben levonandóként szerepel, a második esetben hozzáadandóként, azért a keresett idom területére mindkét esetben

$$\frac{\pi\varphi}{360°} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2\varphi - \frac{\pi\varphi}{360°} = \frac{1}{4}(1 - \cos 2\varphi) = \frac{1}{4} \cdot 2\sin^2\varphi = \frac{1}{2}\sin^2\varphi$$

adódik. Ez egyezik (1)-gyel, így a feladat állítását igazoltuk.

Nóber Ilona (Szentendre, Móricz Zs. g. III. o. t.)