I. megoldás. Képezzük (1) jobb és bal oldalának D különbségét. Ezt úgy írhatjuk, mint két négyzetekből álló különbség különbségét, ezeket pedig szorzattá alakítjuk:

$$\begin{aligned}D =&\big[(x^{2n+1}-2x^{2n-1}y^2+2x^{2n-3}y^4-\ldots\pm 2xy^{2n})^2-(x^{2n+1})^2\big]-\\ &-\big[(y^{2n+1})^2-(y^{2n+1}-2y^{2n-1}x^2+2y^{2n-3}x^4-\ldots\pm 2yx^{2n})^2\big]=\\ =&(2x^{2n+1}-2x^{2n-1}y^2+2x^{2n-3}y^4-\ldots\pm 2xy^{2n})(-2x^{2n-1}y^2+\\ &+2x^{2n-3}y^4-\ldots\pm 2xy^{2n})-(2y^{2n+1}-2y^{2n-1}x^2+2y^{2n-3}x^4-\\ &-\ldots\pm 2yx^{2n})(2y^{2n-1}x^2-2y^{2n-3}x^4+\ldots\mp 2yx^{2n}).\end{aligned}$$

A közös $2x$, $2xy^2$, ill. $2y$, $2yx^2$ tényezők kiemelése után

$$\begin{aligned}D =&4x^2y^2(x^{2n}-x^{2n-2}y^2+x^{2n-4}y^4-\ldots\pm y^{2n})(-x^{2n-2}+x^{2n-4}y^2-\\ &-\ldots\pm y^{2n-2})-4x^2y^2(y^{2n}-y^{2n-2}x^2+y^{2n-4}x^4-\ldots\pm\\ &\pm x^{2n})(y^{2n-2}-y^{2n-4}x^2+\ldots\mp x^{2n-2}).\end{aligned}$$

Páros n esetén a zárójeles kifejezések utolsó tagjában mindenütt a felső előjel érvényes, ezért a két szorzat megfelelő tényezői csak a tagok sorrendjében különböznek, tehát $D=0$. Ugyanezt kapjuk páratlan n esetén is, amikor az utolsó tagokban az alsó előjel érvényes, ugyanis ekkor D kivonandójának többtagú tényezői az első tag megfelelő tényezőjéből (-1)-gyel való szorzással állnak elő, és ezért D kivonandója a kisebbítendőnek $(-1)^2=1$-szerese.

Eszerint minden n természetes szám mellett $D=0$, tehát (1) érvényes.

Fekete Tamás (Budapest, Toldy F. g. IV. o. t.)

II. megoldás. Ha $x\neq 0$, akkor az (1) bal oldalán álló első polinom tagjai, az első tagot nem tekintve, olyan n tagú mértani sorozatot alkotnak, melynek kezdő tagja $-2x^{2n-1}y^2$, és hányadosa $-y^2/x^2$. A hányados minden valós x, y-ra különbözik 1-től, ezért a polinom az ismert összeg–képlet felhasználásával zárt alakban felírható:

$$\begin{aligned}x^{2n+1}-2x^{2n-1}y^2\ldots\pm 2xy^{2n}&=x^{2n+1}-2x^{2n-1}y^2\frac{\left(-\dfrac{y^2}{x^2}\right)^n-1}{-\dfrac{y^2}{x^2}-1}=\\ =x^{2n+1}-2xy^2\frac{(-y^2)^n-x^{2n}}{-y^2-x^2}&=x^{2n+1}-2xy^2\frac{x^{2n}+(-1)^{n+1}y^{2n}}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

A második polinom úgy áll elő az elsőből, hogy x-et és y-t felcseréljük. Ezért ha $y\neq 0$, így írható:

$$y^{2n+1}-2yx^2\frac{y^{2n}+(-1)^{n+1}x^{2n}}{y^2+x^2}.$$

A két kifejezésben szereplő tört páratlan n esetén azonos, páros n esetén pedig egyik a másiknak (-1)-szerese; összefoglalva: bármely (pozitív egész) n mellett egyik a másiknak $(-1)^{n+1}$-szerese. Ennélfogva

$$\frac{x^{2n}+(-1)^{n+1}y^{2n}}{x^2+y^2}=z \tag{2}$$

jelöléssel a két polinom így írható:

$$x^{2n+1}-2xy^2z,\qquad y^{2n+1}-2(-1)^{n+1}yx^2z.$$

Most már négyzetösszegük

$$x^{4n+2}+y^{4n+2}-4x^2y^2z\big[x^2+(-1)^{n+1}y^{2n}\big]+4x^2y^2z^2(y^2+x^2).$$

Az utolsó tagban $z(y^2+x^2)$ helyére (2) számlálóját írva ez a részlet az előtte állóval együtt 0-t ad, tehát a négyzetösszeg értéke $x^{4n+2}+y^{4n+2}$, az állításnak megfelelően.

Ha x és y közül valamelyik 0, akkor az azonosság nyilvánvalóan fennáll.

Bíró Ilona (Miskolc, Herman O. lg. IV. o. t.)