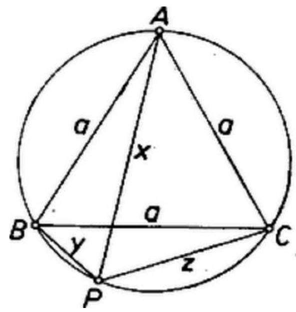
**I. megoldás.** Legyen az $ABC$ háromszög oldala $a$. Abban a speciális esetben, ha $P$ pl. az $A$ csúcsba esik, $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 0 + a^2 + a^2 = 2a^2$, azt kell tehát megmutatnunk, hogy a kérdéses négyzetösszeg értéke $P$ minden helyzetében $2a^2$. A szimmetria miatt elég pl. a rövidebb $BC$ íven fekvő $P$ pontokat tekintenünk. Így $APB\sphericalangle = APC\sphericalangle = 60°$, és $BPC\sphericalangle = 120°$.




Ha egy $DEF$ háromszögben $DEF\sphericalangle = 60°$, és az oldalak hossza $EF = d$, $FD = e$, $DE = f$, ahol $d \geq f$, és $D$-nek $EF$-en levő vetülete $D'$, akkor ismeretes, hogy a $DED'$ derékszögű háromszögben $ED' = f/2$, $DD' = f\sqrt{3}/2$, és így a $DFD'$ derékszögű háromszögből

$$e^2 = \frac{3f^2}{4} + \left(d - \frac{f}{2}\right)^2 = d^2 + f^2 - df.$$

Hasonlóan, ha $DEF\sphericalangle = 120°$, akkor

$$e^2 = \frac{3f^2}{4} + \left(d + \frac{f}{2}\right)^2 = d^2 + f^2 + df.$$

A háromszög területe pedig mindkét esetben

$$t = \frac{df\sqrt{3}}{4}.$$

Alkalmazzuk ezeket az $APB$, $APC$, $BPC$ háromszögre. Legyen $PA = x$, $PB = y$, $PC = z$, így

$$AB^2 = a^2 = x^2 + y^2 - xy, \qquad AC^2 = a^2 = x^2 + z^2 - xz,$$
$$BC^2 = a^2 = y^2 + z^2 + yz,$$

amiből összeadással

$$3a^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + xz - yz). \tag{1}$$

Másrészt az első két háromszög területének összegéből a harmadik háromszög területét kivonva az $ABC$ háromszög területét kapjuk:

$$\frac{xy\sqrt{3}}{4} + \frac{xz\sqrt{3}}{4} - \frac{yz\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

amiből egyszerűsítéssel

$$xy + xz - yz = a^2.$$

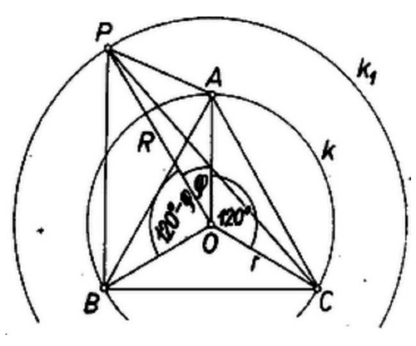
Ezt (1)-be helyettesítve átrendezés és osztás után

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2,$$

amit bizonyítani akartunk.

*Hegedűs Barna* (Debrecen, Tóth Á. g. III. o. t.)

**II. megoldás.** Megmutatjuk, hogy a kérdéses négyzetösszeg minden olyan esetben állandó, ha $P$ egy az $ABC$ háromszög köré írt $k$ körrel koncentrikus $k_1$ körön fut végig. Legyen $k$ középpontja $O$, sugara $r$ és $OP = R$, állandó, továbbá jellemezzük $P$ helyzetét az $AOP = \varphi$ szöggel. A szimmetria miatt elegendő pl. az $AOB$ szögtér egyik felében levő $P$ pontokat vizsgálni, tehát pl. a $0° \leq \varphi \leq 60°$ értékekre szorítkozni.



A $POA$, $POB$, $POC$ háromszögből a koszinusz–tétel alapján

$$
\begin{aligned}
PA^2 &= r^2 + R^2 - 2rR\cos\varphi,\\
PB^2 &= r^2 + R^2 - 2rR\cos(120^\circ - \varphi),\\
PC^2 &= r^2 + R^2 - 2rR\cos(120^\circ + \varphi).
\end{aligned}
$$

$\varphi = 0^\circ$ esetén a $POA$, $\varphi = 60^\circ$ esetén a $POC$ háromszög elfajul, de az egyenlőség helyes marad. Összeadással és kiemeléssel

$$
\begin{gathered}
PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3r^2 + 3R^2 - 2rS, \quad \text{ahol}\\
S = \cos\varphi + \cos(120^\circ - \varphi) + \cos(120^\circ + \varphi).
\end{gathered}
$$

Megmutatjuk, hogy $S$ értéke 0. A koszinuszfüggvény összegezési tétele szerint a 2-ik és 3-ik tagban a $\sin 120^\circ \sin\varphi$ sorozat ellentett előjellel lép fel, kiesik. Így, $\cos 120^\circ = -1/2$ figyelembevételével

$$S = \cos\varphi + 2\cos 120^\circ \cos\varphi = \cos\varphi - \cos\varphi = 0.$$

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk, a négyzetösszeg $3r^2 + 3R^2$ értéke valóban független $\varphi$-től, $P$-nek a $k_1$ körön elfoglalt helyzetétől.

Ha $k_1$ azonos $k$-val, akkor

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6r^2,$$

és mivel $a/r = \sqrt{3}$, azért eredményünk megegyezik az I. megoldás eredményével.

*Vida György* (Budapest, Madách I. g. IV. o. t.)