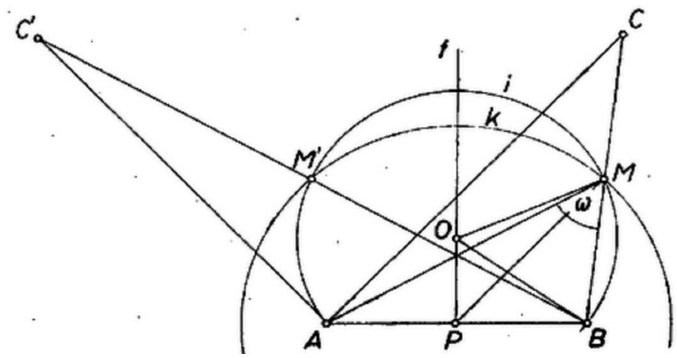
I. megoldás. Az AB szakasz középpontját P-vel jelölve az ABM háromszög MP súlyvonala egyben az ABC háromszögnek középvonala, s így $b/2$ hosszúságú. Ennek alapján ez a háromszög megszerkeszthető: az $AB=c$ szakaszt felvéve M számára egy mértani hely az AB szakasz ω nyílású i látószögköríve, és egy másik a P körül $b/2$ sugárral írt k kör. (Elég mindkettőt az AB egyenes egyik partján megszerkeszteni, ti. amelyen C-t kapni kívánjuk; így az AB-re szimmetrikus megoldás felesleges előállítását elkerüljük.) Ezután C-t mint B tükörképét kapjuk az M pontra.



A szerkesztés helyessége nyilvánvaló. A megoldások száma 2, 1, vagy 0, i és k közös pontjainak száma szerint. 2 megoldás esetén az ABM és BAM' háromszögek az AB szakasz f felező merőlegesére tükrösek, és így egybevágók, az ABC és ABC' háromszögek azonban nem egybevágók.

Az AMB és AMC háromszögekben az MA oldal közös, $MB=MC$, a közbezárt szögek közül $AMB=\omega$ hegyesszög, ezért AMC szög tompaszög, így $AB<AC$, másképpen

$$c<b. \tag{2}$$

Legyen az i körív középpontja O. Ha az M metszéspont létrejön, akkor

$$PO+OM\geq PM=\frac{b}{2}. \tag{3}$$

Mivel ω hegyesszög, azért O az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán van, mint i. Így a középponti és kerületi szögek közti összefüggés szerint $POB\sphericalangle=\omega$, tehát

$$PO=PB\operatorname{ctg}\omega=\frac{c}{2}\operatorname{ctg}\omega,\qquad OM=OB=\frac{PB}{\sin\omega}=\frac{c}{2\sin\omega}.$$

Ezeket *(3)-ba beírva (és a két oldalt felcserélve)*

$$\frac{b}{2}\leq\frac{c}{2}\left(\operatorname{ctg}\omega+\frac{1}{\sin\omega}\right)=\frac{c}{2}\cdot\frac{1+\cos\omega}{\sin\omega}=\frac{c}{2}\frac{2\cos^2\dfrac{\omega}{2}}{2\sin\dfrac{\omega}{2}\cos\dfrac{\omega}{2}}=\frac{c}{2\operatorname{tg}\dfrac{\omega}{2}},$$

ugyanis

$$1+\cos\omega=\sin^2\frac{\omega}{2}+\cos^2\frac{\omega}{2}+\cos^2\frac{\omega}{2}-\sin^2\frac{\omega}{2}=2\cos^2\frac{\omega}{2}.$$

A nyert egyenlőtlenség (1) bal oldalának átrendezett alakja. Ennek teljesülnie kell, ha a háromszög szerkeszthető. Fordítva, ha a nyert egyenlőtlenség teljesül, akkor (3) is, de akkor a P-ben AP-re emelt merőleges előbb metszi i-t, mint k-t, viszont (2) folytán A és B, az i körív végpontjai, k belsejében vannak, tehát i-nek és k-nak van közös pontja.

Udvardy Antal (Budapest, Táncsics M. g. III. o. t.)

Megjegyzés. C-t az M pont megszerkesztése nélkül is megkaphatjuk, ha ti. a PBM háromszögnek a B középpontból 2-szeresre nagyított képét szerkesztjük

Nárai György (Budapest, Bem J. g. III. o. t.)

II. megoldás. Húzzuk meg egy tetszés szerinti B^*C^* szakasz M^* felezőpontjából az M^*B^*-gal ω szöget bezáró félegyenest. Messe ezt a B^* és C^* alappontokhoz és a $c:b$ aránymutatóhoz tartozó Apollóniosz kör A^*-ban. Ekkor $A^*B^*C^*$ a keresetthez hasonló háromszög. A^*-tól B^*, ill. C^* felé felmérve az $A^*B=c$, ill. $A^*C=b$ szakaszt, az A^*BC háromszög nyilvánvalóan megfelelő.

Megmutatható, de elég sok számítást igényel, hogy a félegyenes és a kör közös pontja létezésének feltétele éppen az állításbeli (1).

Bodoky Andrea (Budapest, Teleki Blanka lg. IV. o. t.)