I. megoldás. A jobb oldal helyére $\cos^2 x+\sin^2 x$-et írva (1) így alakítható:

$$\sin^2 x(1+\sin^{n-2} x)+\cos^2 x(1-\cos^{n-2} x)=0. \tag{2}$$

Az $n=1$ eset vizsgálatát későbbre halasztva, minden más esetben $n-2\geq 0$, így $\sin^{n-2} x\geq -1$, és $\cos^{n-2} x\leq 1$, ezért $1+\sin^{n-2} x\geq 0$, és $1-\cos^{n-2} x\geq 0$, tehát (2) bal oldalán egyik szorzat sem negatív. Így (2) csak úgy teljesülhet, ha mindkét szorzat eltűnik:

$$\sin^2 x(1+\sin^{n-2} x)=0, \quad \text{és} \tag{3}$$

$$\cos^2 x(1-\cos^{n-2} x)=0 \tag{4}$$

egyszerre fennáll. – (3) két esetben teljesül: ha

a) $\sin^2 x=0$, azaz $x=k\pi$ (k egész szám);

b) $\sin^{n-2} x=-1$, ennek csak páratlan n mellett van valós megoldása: $\sin x=-1$, azaz

$$x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi.$$

Az *a)* esetben $\cos x=\pm 1$, így (4) csak úgy teljesülhet, ha második tényezője 0. Páros n-re $\cos^{n-2} x=1$, ezért a második tényező mindig 0, páratlan n-re viszont csak akkor 0 a második tényező, ha $\cos x=+1$, azaz $x=2k\pi$ esetén.

A *b)* esetben $\cos x=0$, tehát (4) teljesül.

Végül $n=1$ mellett (1) osztással így írható:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x=\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

amiből

$$\frac{\pi}{4}+x=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi, \text{ azaz } x=\begin{cases}2k\pi\\ \frac{3}{2}\pi+2k\pi.\end{cases}$$

Más úton ugyanarra az eredményre jutottunk, mint fentebb az 1-nél nagyobb páratlan n kitevőkre. Ezek szerint a megoldás:

$$\text{ha } n=2j \ (j>0, \text{egész}): \qquad x=k\pi \ (k \text{ egész});$$

$$\text{ha } n=2j-1 \ (\text{egész}): \qquad x=\begin{cases}2k\pi,\\ \left(\frac{3}{2}+2k\right)\pi.\end{cases}$$

Gillemot László (Budapest, József A. g. IV. o. t.)

II. megoldás. Páros n esetén $\cos^n x$ és $\sin^n x$ 0 és 1 közti számok – a két határt is megengedve –, ennélfogva különbségük legnagyobb értéke úgy adódik, ha $\cos^n x$ legnagyobb és $\sin^n x$ legkisebb értékét vesszük:

$$\cos^n x-\sin^n x\leq 1.$$

Az adott egyenlet éppen e legnagyobb érték felvételét írja elő, tehát

$$\cos^n x=1, \quad \sin^n x=0, \text{ amiből } \cos x=\pm 1, \ x=k\pi.$$

Páratlan n mellett is megoldást ad $\cos x=1$, $x=2k\pi$, egyébként $\sin^n x=\cos^n x-1<0$, így $\sin x<0$, tehát (egyelőre a $(0,2\pi)$ intervallumra szorítkozva)

$$\pi<x<2\pi.$$

Vezessük be új ismeretlennek $y=2\pi-x$-et. Ekkor $\cos x=\cos y$, $\sin x=-\sin y$, és $\pi>y>0$, tehát $\sin y>0$, és (1) így alakul

$$\cos^n y+\sin^n y=1. \tag{5}$$

Innen

$$\cos^n y=1-\sin^n y\geq 0,$$

tehát $\cos y\geq 0$, ezért csak a $\pi/2\geq y>0$ szögekről lehet szó. Nyilvánvaló, hogy $y=\pi/2$ megoldás, és így (1)-nek $x=3\pi/2$ is megoldása.

Megmutatjuk, hogy a $0<y<\pi/2$ értékekre (5) nem teljesülhet, tehát további megoldás nincs. Valóban, $n=1$ esetén $\cos y$ és $\sin y$ a derékszögű koordináta-rendszerben az origó körüli egységkör y irányszögű P pontjának koordinátái, és így az OPP' derékszögű háromszögben (P' a P vetülete az X-tengelyre) a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$OP'+P'P>OP, \text{ azaz } \cos y+\sin y>1.$$

$n\geq 3$ esetén viszont $\cos^n y<\cos^2 y$, $\sin^n y<\sin^2 y$, és így $\cos^n y+\sin^n y<\cos^2 y+\sin^2 y=1$.

Eredményeink mindenben egyeznek az I. megoldás végén levő összeállítással.

Kláb János (Pécs, Zipernovszky K. gépip. t. III. o. t.)