I. megoldás. A bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala pozitív és jobb oldala nem negatív. Ezért mindkét oldalát négyzetre emelve az

$$(a^2+b^2+c^2)^2=(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq 48\,S^2 \tag{2}$$

egyenlőtlenség vele ekvivalens, elegendő ezt bizonyítanunk.

A Heron-képlet mindkét oldalát négyzetre emelve beszorzás és a törtek eltávolítása után (2) jobb oldalának 3-ad részét kapjuk:

$$16\,S^2=-(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

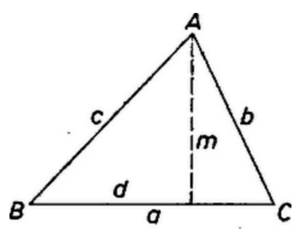
Ezt felhasználva (2) bal és jobb oldalának különbsége így alakítható:

$$\begin{aligned}&4(a^4+b^4+c^4)+4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=\\&=2\big[(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\big].\end{aligned} \tag{3}$$

Ez nyilván sohasem negatív, tehát (2) és vele (1) minden háromszögre érvényes. Egyenlőség (2)-ben és (1)-ben akkor és csak akkor áll fenn, ha (3) jobb oldalán mind a három különbség 0-val egyenlő. Az $a^2-b^2=(a-b)(a+b)=0$ követelményből $a-b=0$, $a=b$, hiszen $a+b>0$. A másodikból ugyanígy $b=c$. Ezek szerint $a=b=c$, így pedig (3) harmadik különbsége is 0. Tehát (1) két oldala akkor és csak akkor egyenlő, ha a háromszög szabályos.

Magyar Erzsébet (Ócsa, Bolyai J. g. IV. o. t.)

II. megoldás. Legyen adva egy háromszög. Jelöljük a csúcsait A, B, C-vel úgy, hogy a B csúcsnál hegyesszög legyen. Az A csúcsból húzott magasság legyen m, talppontjának távolsága B-től d.



1. ábra

Ekkor

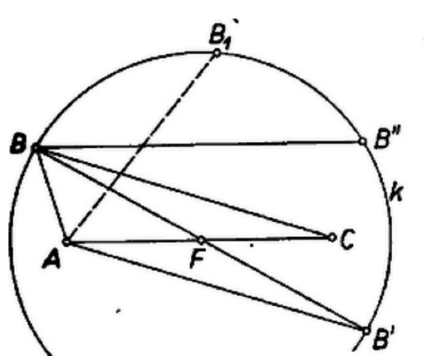
$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S&=a^2+\big[m^2+(a-d)^2\big]+(m^2+d^2)-2\sqrt{3}am=\\&=2a^2-2ad+2d^2-2\sqrt{3}am+2m^2=\\&=\frac{1}{2}(a^2-4ad+4d^2+3a^2-4\sqrt{3}am+4m^2)=\\&=\frac{1}{2}\big[(a-2d)^2+(\sqrt{3}a-2mt)^2\big].\end{aligned}$$

Ez a kifejezés nem lehet negatív, s így

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S.$$

Továbbá 0 is csak akkor lehet a fent nyert kifejezés, ha $d=a/2$, tehát a háromszög egyenlőszárú ($b=c$), továbbá $m=\sqrt{3}a/2$, ami az egyenlő szárú háromszögek közül a szabályosnál következik be. Az éppen bebizonyított egyenlőtlenségben az egyenlőség tehát csak a szabályos háromszögekre áll fenn.

III. megoldás. Tekintsük állandónak az $a^2+b^2+c^2$ négyzetösszeget és keressük meg, a, b, c mely értékrendszere mellett maximális a háromszög területe, és mennyi ez a maximum.



2. ábra

Tegyük fel, hogy a, b, c nem mind egyenlők. Ekkor van köztük

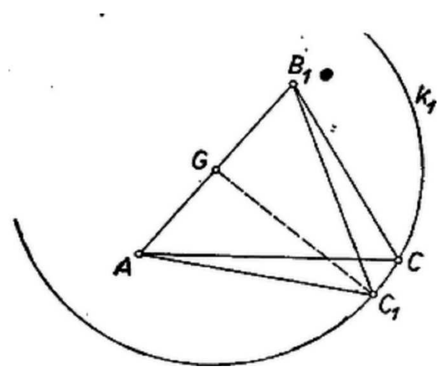
$$d=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

-nál nagyobb is, kisebb is, legyen ez a, ill. c. A csúcsokat a szokás szerint jelölve tükrözzük a háromszöget az $AC=b$ oldal F felezőpontjára. A nyert $ABCB'$ paralelogrammában az oldalak négyzetösszege ismert tétel szerint[1] egyenlő az átlók négyzetösszegével:

$$2(a^2+c^2)=b^2+4s^2, \tag{4}$$

ahol $s=BF$, a háromszög AC oldalához tartozó súlyvonal. Ez azt jelenti, hogy ha A-t és C-t rögzítjük, akkor B mértani helye egy az F középpont körüli k kör, mert így b, vele a^2+c^2, és (4) szerint s is állandó.

Távolítsuk B-t A-tól a k-n addig a B_1 helyzetig, amelyre $AB_1=d$. Ilyen helyzet van, mert a távolság folytonosan növekszik, és van k-n az A-tól d-nél távolabbi pont, ilyen B-nek az AC felező merőlegesére való B'' tükörképe, amelyre $AB''=CB=a>d$. Ebből azt is látjuk, hogy B_1 a BB'' íven van, tehát az ACB_1 háromszög területe nagyobb ABC területénél, mert az előbbiben a közös AC alaphoz tartozó magasság nagyobb.



3. ábra

Most már az $AB_1=c=d$ oldalt rögzítve C mértani helye egy az AB_1-nek G felezőpontja körüli k_1 kör, és a terület nyilván arra a C_1-re maximális, amelyre $C_1G\perp AB_1$, vagyis $a=b$, és így a háromszög szabályos,mert

$$a^2=b^2=\frac{3d^2-c^2}{2}=c^2.$$

Ekkor a terület $S=a^2\sqrt{3}/4$, és $4\sqrt{3}S=3a^2=a^2+b^2+c^2$, tehát (1)-ben egyenlőség áll. Minden más esetben S-sel együtt (1) jobb oldala kisebb. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

*Kóta József*nek az Olimpián írt dolgozatából.

Megjegyzések. I. Az állítást annak az ismert eredménynek[2] a felhasználásával is bizonyíthatjuk, hogy ugyanakkora kerületű háromszögek közül a szabályos háromszög területe a legnagyobb. Nyilvánvalóan elegendő ugyanis azokat a háromszögeket vizsgálnunk, amelyekben $a+b+c=2s$, állandó. Szabályos háromszög esetében $a=b=c=2s/3=a'$, ekkor (1) két oldala egyenlő, közös értékük $4s^2/3$. Megmutatjuk, hogy minden más esetben (1) bal oldala nagyobb ennél. Legyen az első két oldal értéke $a=a'+x$, $b=a'+y$, ahol x és y közül legalább az egyik 0-tól különböző. Így a harmadik oldal: $c=2s-2a'-x-y=a'-(x+y)$, és a négyzetösszeg:

$$(a'+x)^2+(a'+y)^2+\left[a'-(x+y)\right]^2=3a'^2+x^2+y^2+(x+y)^2>3a'^2=\frac{4s^2}{3}.$$

A jobb oldal viszont a hivatkozott eredmény szerint kisebb, tehát minden más esetben (1)-ben valóban a $>$ jel érvényes.

Romhányi Gábor (Esztergom, Temesvári P. g. IV. o. t.)

2. Az állításnak az $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ oldalakkal bíró S_n területű n-szögre $(n>3)$ való

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\geq 4S_n\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{\mathrm{n}}$$

általánosítása az I. megjegyzés gondolatmenetéhez hasonlóan bizonyítható.

Sonnevend György (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)

[1] Lásd pl. 1006. feladat, K. M. L. 21 (1960/9) 20. o.

[2] Lásd n-szögre $(n\geq 3)$ *Hódi Endre*: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása (Tankönyvkiadó, Budapest, 1959) 48. o.