

Vonjuk ki az első egyenlet négyzetéből a második egyenletet; így az ismeretlenek négyzetei kiesnek:

$$2[xy + (x + y)z] = a^2 - b^2.$$

xy és $x + y$ az (1), ill. (3) alapján z -vel kifejezhető, és így z -re egyismeretlenes egyenletet kapunk:

$$2[z^2 + (a - z)z] = a^2 - b^2,$$

amiből

$$(4) \quad z = \frac{a^2 - b^2}{2a},$$

feltéve természetesen, hogy $a \neq 0$.

Most már ismerjük x és y szorzatát és összegét:

$$(5) \quad xy = \left(\frac{a^2 - b^2}{2a}\right)^2, \quad x + y = a - z = \frac{a^2 + b^2}{2a},$$

így x és y a következő másodfokú egyenlet gyökei:

$$u^2 - \frac{a^2 + b^2}{2a}u + \left(\frac{a^2 - b^2}{2a}\right)^2 = 0.$$

A diszkrimináns így alakítható:

$$D = \frac{1}{4a^2}[(a^2 + b^2) - (2a^2 - 2b^2)^2] = \frac{1}{4a^2}(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2),$$

tehát

$$u_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)}}{4a}.$$

Eszerint az egyenletrendszernek két megoldása van, ezekben z értéke közös, x és y pedig felcserélve egyenlők:

$$\begin{array}{lll} x_1 = u_1, & y_1 = u_2, & z_1 = \frac{a^2 - b^2}{2a}, \\ x_2 = u_2, & y_2 = u_1, & z_2 = z_1. \end{array}$$

Az x , y , z számok pozitívságához (1) szerint szükséges:

$$a > 0.$$

Így z valóban pozitív, ha

$$(6) \quad a^2 - b^2 > 0, \quad \text{azaz} \quad a > |b|.$$

Ezekkel az (5) alatti mindkét kifejezés pozitív, ezért x , y akkor és csak akkor pozitívak, és egyszersmind különbözők is, ha D pozitív. Ha pedig x , y különbözők, akkor (3) szerint z egyikükkel sem egyenlő. (6) miatt D első kéttagúja pozitív, így a másodiknak is pozitívnak kell lennie:

$$3b^2 > a^2.$$

A keresett feltételek a következőkben foglalhatók össze:

$$a > 0, \quad b^2 < a^2 < 3b^2.$$

Nagy Géza (Debrecen, Református g. IV. o. t.)