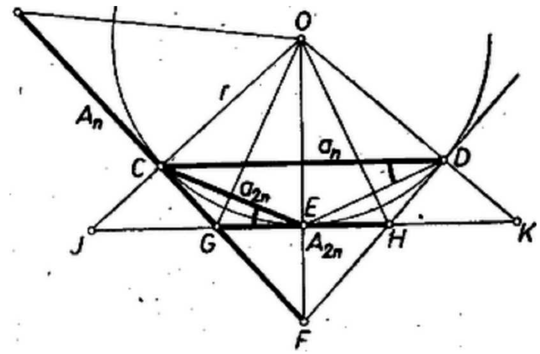
1. Legyen az O középpont körüli r sugarú körbe írt szabályos n-szög egy oldala $CD = a_n$, a rövidebb CD ív felezőpontja E, így a beírt szabályos $2n$-szög oldala $CE = a_{2n}$. Húzzuk meg továbbá a kör érintőjét C, D és E-ben, legyen az első két érintő metszéspontja F, és messe a harmadik az első kettőt G, H-ban. Így CF és DF fele akkora, mint a körülírt szabályos n-szög A_n oldala, GH pedig a körülírt szabályos $2n$-szög A_{2n} oldala.



E jelölésekkel $K_n = nA_n$, $k_n = na_n$, $K_{2n} = 2nA_{2n}$, $k_{2n} = 2na_{2n}$, és a bizonyítandó összefüggések így alakulnak:

$$A_{2n} = \frac{A_n a_n}{A_n + a_n}, \tag{2}$$

$$a_{2n} = \sqrt{\frac{a_n A_{2n}}{2}}. \tag{3}$$

A G-ből húzott érintők egyenlősége alapján $GC = GE = A_{2n}/2$, ezért $FG = FC - GC = A_n/2 - A_{2n}/2 = (A_n - A_{2n})/2$ GH párhuzamos CD-vel, így a CDF és GHF háromszögek hasonlóságából:

$$CD : GH = CF : GF, \qquad \text{azaz} \qquad a_n : A_{2n} = \frac{A_n}{2} : \frac{A_n - A_{2n}}{2},$$

és ebből A_{2n}-t kifejezve (2)-re jutunk.

A CDE és CEG egyenlő szárú háromszögek ugyancsak hasonlók, mert az alapon fekvő DCE, ill. CEG szögek váltószögek. Így

$$CD : CE = CE : CG, \qquad \text{azaz} \qquad a_n : a_{2n} = a_{2n} : \frac{A_{2n}}{2},$$

ez pedig (3)-ra vezet. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

2. Ismeretes, hogy $K_4 = 8r$ és $k_4 = 4\sqrt{2}r \approx 5,6569\,r$. Ezekből az (1) képletekkel

$$K_8 = \frac{2K_4k_4}{K_4 + k_4} = 16\left(\sqrt{2} - 1\right) r \approx 6{,}6274\,r,$$

$$k_8 = \sqrt{k_4K_8} = 8\sqrt{2 - \sqrt{2}}r \approx 6{,}1229\,r.$$

Másrészt $K_6 = 4\sqrt{3}r \approx 6{,}9282\,r$ és $k_6 = 6\,r$, és így

$$K_{12} = \frac{2K_6k_6}{K_6 + k_6} = 24(2 - \sqrt{3})\,r \approx 6{,}4308\,r,$$

$$k_{12} = \sqrt{k_6K_{12}} = 12\sqrt{2 - \sqrt{3}}\,r = 6(\sqrt{6} - \sqrt{2})\,r \approx 6{,}2117\,r;$$

$$K_{24} = \frac{2K_{12}k_{12}}{K_{12} + k_{12}} = 48(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)\,r \approx 6{,}3193\,r.$$

$$k_{24} = \sqrt{k_{12}K_{24}} = 12\sqrt{8 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}\,r \approx 6{,}2653\,r.$$

Orbán Szilvia (Budapest, Kaffka M. lg. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1: A (2) összefüggést másképpen is megkaphatjuk. Messe pl. OC, OD az E-beli érintőt J, ill. K-ban, így $JK = A_n$. Mivel OG felezi a JOE szöget, azért a szögfelező osztásarányára ismert tétel szerint

$$EG : GJ = OE : OJ = OC : OJ = CD : JK, \text{ azaz}$$
$$\frac{A_{2n}}{2} : \frac{A_n - A_{2n}}{2} = a_n : A_n.$$

Benczur András (Budapest, Fazekas M. gyak. g. IV. o. t.)

2. A dolgozatok legnagyobb része trigonometriai képletek és goniometriai azonosságok felhasználásával bizonyította az állításokat; vagyis a fentieknél erősebb eszközökkel, és minden esetben hosszabb úton. Erre nem volt szükség.

3. Bár a bizonyítást a (2) és (3) alakban a sokszögek oldalaira végeztük, az állítást – történeti okból – mégis a kerületekre mondtuk ki. Ugyanis Archimedész a fenti képletpárral számította a 6, 12, 24, 48 és 96 oldalú körülírt és beírt sokszögek kerületét és a

$$K_6,\ k_6,\ K_{12},\ k_{12},\ K_{24},\ k_{24},\ K_{48},\ k_{48},\ K_{96},\ k_{96}$$

sorozatból egyre kisebb eltérésű egyenlőtlenségpárokat kapott a kör k kerületének két határ közé zárásához: $k_6<k<K_6$, $k_{12}<k<K_{12}$, s. í. t. Ezt az eljárást nevezi a matematika története *archimedészi algoritmusnak* (lépésről lépésre való műveletsorozatnak).

4. (2) és (3) természetesen akkor is érvényesek, ha a_n a kör egy tetszés szerinti húrja, A_n a vele párhuzamos, közelebbi érintőből a húr végpontjaihoz tartozó sugarakkal kimetszett szakasz, a_{2n} a húrral lemetszett rövidebb ív feléhez tartozó húr, végül A_{2n} ugyanúgy áll elő a_{2n}-ből, mint A_n az a_n-ből.