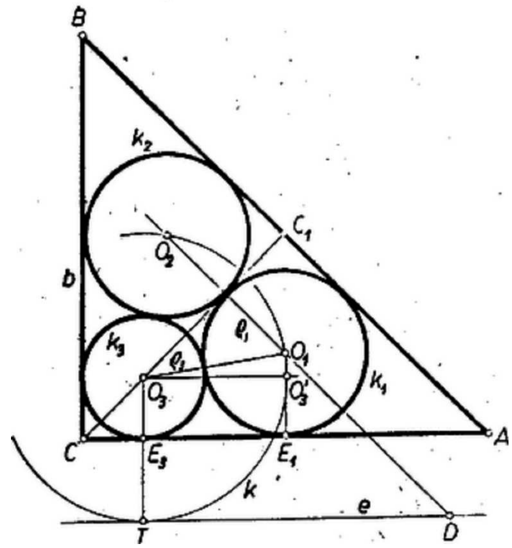
Nyilvánvaló, hogy k_1 és k_2 az ABC háromszög CC_1 tengelyére tükrösek, egymást a tengelyen érintik, tehát k_1 az ACC_1, k_2 pedig a BCC_1 derékszögű egyenlő szárú háromszög beírt köre. Ezek befogóinak hossza $b/\sqrt{2}$. Másrészt a beírt kör sugarát – ha a befogók a, b és az átfogó c – a $\varrho = (a+b-c)/2$ képlet adja meg. Ezért k_1 és k_2 sugara:

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \frac{1}{2}(2b/\sqrt{2} - b) = (\sqrt{2}-1)b/2 \approx 0{,}2071b.$$



Legyen k_3, sugara ϱ_3, k_1, k_3 középpontja O_1, O_3 utóbbi nyilván a CC_1-en – érintési pontjuk CA-n E_1, E_3-és O_3 vetülete az O_1E_1 egyenesen O_3'. Ekkor az $O_1O_3O_3'$ derékszögű háromszög átfogója ϱ_1 és ϱ_3 összege, egyik befogója a pozitív különbségük, másik befogója pedig $O_3O_3' = E_3E_1 = CE_1 - CE_3 = CE_1 - O_3E_3 = b/2 - \varrho_3$. Ebből

$$\left(\frac{b}{2} - \varrho_3\right)^2 = (\varrho_1 + \varrho_3)^2 - (\varrho_1 - \varrho_3)^2 = 4\varrho_1\varrho_3,$$

ϱ_1 behelyettesítésével és rendezéssel ϱ_3-ra

$$4\varrho_3^2 - 4(2\sqrt{2}-1)b\varrho_3 + b^2 = 0,$$

így a kisebb gyök

$$\varrho_3 = b\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}148b.$$

(A négyzetgyököt + jellel véve $\varrho_3^* \approx 1{,}680\,b$, ez a kör nincs benne a háromszögben.)

$b = 20$ cm esetén $\varrho_1 = \varrho_2 \approx 41{,}4$ mm, $\varrho_3 \approx 29{,}7$ mm. E sugarakkal a BAC, ABC, ACB szögek szárait érintő köröket rajzolva, azok páronként egymást is érintik.

Somogyi Károly (Bonyhád, Petőfi S. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az ellenőrzés szerkesztéssel is végrehajtható. O_1 és O_3 megállapítása alapszerkesztés. Ha O_3 körül O_3O_1 sugárral k kört írunk, ennek AC-vel párhuzamos érintői közül az AC-hoz közelebbinek, e-nek AC-tól mért távolsága (a háromszögön kívül) ϱ_1, tehát e megszerkeszthető. Érintse k az e-t T-ben, és messe O_1O_2 az e-t D-ben, ekkor nyilván $DT^2 = DO_1 \cdot DO_2$, tehát az adódott DO_1, DO_2 szakaszok mértani közepét megszerkesztve T kitűzhető. Az e-re T-ben állított merőleges CC_1-ből kimetszi O_3-at.

V. L.

2. A fentiekben az egyenlő szárú derékszögű háromszög speciális esetére számítással és szerkesztéssel megoldottuk az ún. *Malfatti*-[1] feladatot, amely - első megfogalmazásában – bármely háromszög belsejében azon 3 kör meghatározását kívánja, melyek mindegyike kívülről érinti a másik 2 kört és a háromszög más-más 2 oldalát.

[1] *Malfatti* olasz matematikus (1731 – 1803).