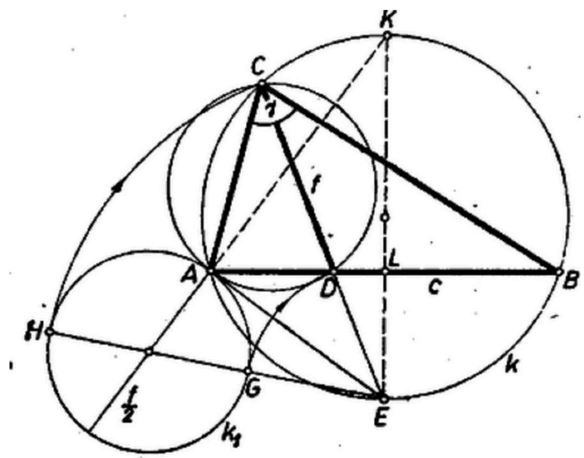
I. megoldás. A keresett ABC háromszögben az adott ACB szög $CD = f$ felezője meghosszabbításának a k körülírt körrel való E metszéspontja felezi a C-t nem tartalmazó AB ívet, mert az ACE és ECB kerületi szögek egyenlők. Másrészt a BE íven fekvő EAB és ECB szögek is egyenlők. Így az ADE és CAE háromszögek hasonlók, mert E-nél levő szögük közös, tehát

$$AE : ED = CE : EA.$$

Itt AE ismert szakasz, mert az $AB = c$ oldalból és az ACB szögből k, továbbá rajta E megszerkeszthető. Ennélfogva az adódó

$$ED \cdot EC = ED(ED + DC) = ED(ED + f) = EA^2 \tag{1}$$

egyenlőség felhasználásával ED és EC is szerkeszthetők, pl. a körhöz külső pontból húzott szelőn és érintőn létrejött szakaszokra ismert tétel alapján, ha a szelőnek a körbe eső húrját f-nek, az érintő hosszát pedig AE-nek vesszük.



1. ábra

A segédszerkesztés célszerűen úgy végezhető, hogy az AE-t A-ban érintő, f átmérőjű k_1 kört vesszük és meghúzzuk ehhez E-ből a középpontján átmenő EGH szelőt (ahol $EG < EH$). Ekkor $EG \cdot EH = EA^2$. Mivel $GH = f$, így

$$EG = ED; \quad EG + GH = ED + f = EC,$$

tehát C-t k-ból az E körül EH sugárral írt körívvel metszhetjük ki. (k_1 szerkesztését megkönnyíti az az észrevétel, hogy középpontja az AK egyenesen van, ahol K a k kör E-vel átellenes pontja.)

Az ABC háromszög megfelel a feltételnek. Ugyanis AB egyenlő az adott szakasszal, CE felezi az ACB szöget, végül f-et C-ből E felé felmérve – vagy ami ugyanaz, CE-re HG-t ráforgatva – a D^* végpont AB-n van. Valóban, (1) szerint az ACD^* háromszög körülírt köre érinti AE-t, ezért az EAD^* (húr-érintő) szögre

$$EAD^*\sphericalangle = ACD^*\sphericalangle = ACE\sphericalangle = ECB\sphericalangle = EAB\sphericalangle.$$

k és E egyértelműen szerkeszthető. Nyilvánvaló, hogy C létrejön, ha $EH \leq EK$, másképpen: ha $ED \geq EL$, ahol L az AB oldal felezőpontja. Ezekből f-re is adhatunk feltételt:

$$f = CD = CE - DE \leq KE - LE = KL, \tag{2}$$

vagyis f nem lehet nagyobb annál a távolságnál, amennyire az AB szakasz $ACB\sphericalangle$ nyílású látószög-körívének AB-től legtávolabbi pontja van. A különböző megoldások száma nyilvánvalóan 1 vagy 0.

Szerkesztésünk bármely adott ACB szög esetén érvényes, mert sehol nem használtuk ki, hogy esetünkben ez a szög derékszög. Derékszögű háromszög esetére (2) így alakul: $f < c/2$.

Kunszt Zoltán (Pápa, Türr I. g. IV. o. t.)

II. megoldás. Az I. megoldás szerinti k körből C-t a c átfogóhoz tartozó m magasság ismerete alapján is kimetszhetjük. m-re egyenletet abból kaphatunk, hogy az ACD és BCD részháromszögek együttes területe egyenlő az ABC háromszög t területével. D-ből a befogókra bocsátott merőlegesek hossza a létrejövő egyenlő szárú derékszögű háromszögekből $f/\sqrt{2}$, ezért

$$2t = cm = \frac{af}{\sqrt{2}} + \frac{bf}{\sqrt{2}} = \frac{(a+b)f}{\sqrt{2}}.$$

Innen Pythagorász tétele és $2t = ab$ alapján

$$a + b = \sqrt{(a^2+b^2)+2ab} = \sqrt{c^2+2cm} = \frac{\sqrt{2}cm}{f},$$

tehát négyzetre emeléssel és rendezéssel

$$2c^2m^2 - 2cf^2m - c^2f^2 = 0.$$

Ennek gyökei biztosan valósak, mert a tiszta tag negatív, a négyzetes tag együtthatója pedig pozitív. Ebből azt is látjuk, hogy a két gyök ellentett előjelű. A pozitív gyök:

$$m = \frac{f}{c}\left(\sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{c^2}{2}} + \frac{f}{2}\right), \tag{3}$$

az adatok alapján mindig megszerkeszthető.

Háromszöget csak akkor kapunk, ha $m \le c/2$, azaz

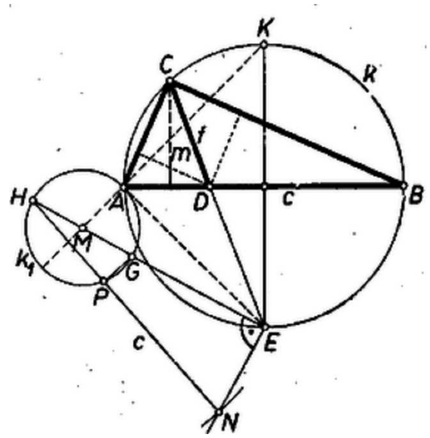
$$\frac{c}{2} \ge \frac{f}{c}\left(\sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{c^2}{2}} + \frac{f}{2}\right),$$

$$\frac{c^2}{f} - f \ge \sqrt{f^2 + 2c^2},$$

amiből négyzetre emeléssel, majd gyökvonással, és figyelembe véve, hogy c, f pozitívok

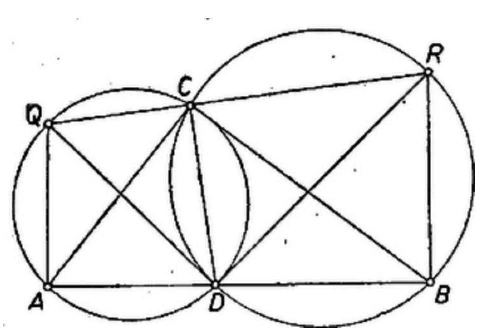
$$c^4 \ge 4c^2f^2, \quad f \le c/2.$$

Antal Kálmán (Budapest, Kandó K. hír. ip. t. III. o. t.)



2. ábra

Megjegyzés. (3) szerkesztésében észrevehetjük, hogy a zárójelben álló kéttagú $EM + MH = EH$, ahol M a k_1 kör középpontját jelöli. Eszerint $m = f \cdot EH/c$, tehát EH mint befogó fölé $HN = c$ átfogóval derékszögű háromszöget szerkesztve m-et megadja HN-nek a k_1-be eső HP szakasza (2. ábra). (Ez természetesen csak $ACB\sphericalangle = 90^\circ$ esetén érvényes.)



3. ábra

III. megoldás. Megrajzolva az ACD és BCD háromszög körülírt körét, ezek átmennek azoknak az AD-re, ill. BD-re mint befogóra szerkesztett ADQ, ill. BDR egyenlő szárú derékszögű háromszögeknek a Q, ill. R csúcsán, amelyek AB-nek ugyanazon oldalán vannak, mint C, és a derékszögek csúcsa A, ill. B. Így ugyanis $AQD\sphericalangle = BRD\sphericalangle = 45^\circ = ACD\sphericalangle == BCD\sphericalangle$. A létrejött húrnégyszögekből $DCQ\sphericalangle = 180^\circ - DAQ\sphericalangle = 90^\circ = DCR\sphericalangle$, tehát C a QR egyenesen van, és $CD \perp QR$. Másrészt

$$QDR\sphericalangle = 180^\circ - ADQ\sphericalangle - BDR\sphericalangle = 90^\circ,$$

$$\text{és}\quad DQ + DR = AD\sqrt{2} + BD\sqrt{2} = AB\sqrt{2} = c\sqrt{2}.$$

Eszerint a DQR derékszögű háromszögből ismert a befogók összege és az átfogóhoz tartozó f magasság. Ha ezt a háromszöget megszerkesztjük, ebből egy az előírásnak megfelelő háromszög csúcsait úgy kapjuk, hogy vesszük az átfogóhoz tartozó magasság talppontját és a befogók fölé kifelé szerkesztett négyzetek középpontját.

A DQR háromszög megszerkesztése a II. megoldáséhoz hasonló számítás alapján történhetik. A befogók összegét d-vel, az egyik befogót a-val jelölve az átfogó hossza $\sqrt{a^2+(d-a)^2}$. A kétszeres terület négyzetét kétféleképpen számítva

$$\left[a(d-a)\right]^2=m^2\left[a^2+(d-a)^2\right]=m^2(d^2-2ad+2a^2)=m^2d^2-2m^2\left[a(d-a)\right].$$

Ez másodfokú egyenlet $a(d-a)$-ra, aminek alapján a befogók mértani közepe, majd az I. megoldás segédszerkesztésének mintájára a befogók megszerkeszthetők.

A szerkesztés helyességének bizonyítását és a diszkussziót az olvasóra bizzuk.

Kéry Gerzson (Sopron, Széchenyi I. g. IV. o. t.)