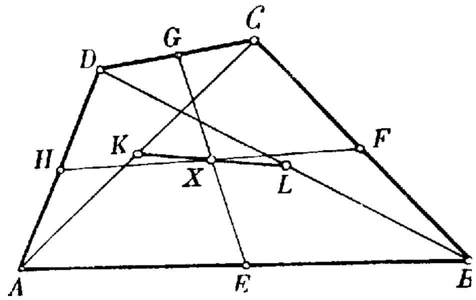
9. *Vonaldarab közepe.* A vonaldarab A, B végpontjait a tetszésszerinti O pontból hozzájuk vont $OA = \mathbf{A}$ és $OB = \mathbf{B}$ vectorokkal adván meg, a vonaldarab M közepét az $OM = \dfrac{\mathbf{A}+\mathbf{B}}{2}$ vector határozza meg.

10. *Egy a síkban vagy a térben fekvő négyszög szemköztes oldalainak közepeit összekötvén, a nyert transversálisok egymást felezik. Metszéspontjuk annak a, vonaldarabnak közepe, mely az átlók közepeit köti össze.*



Az A, B, C, D pontokat egy tetszésszerinti O kezdőpontra vonatkoztatván a megfelelő vectorok $OA = \mathbf{A}$, $OB = \mathbf{B}$, $OC = \mathbf{C}$ és $OD = \mathbf{D}$.

Ennélfogva E-nek $\dfrac{\mathbf{A}+\mathbf{B}}{2}$, G-nek $\dfrac{\mathbf{C}+\mathbf{D}}{2}$ a vectoruk.

EG közepének vectora

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{A}+\mathbf{B}}{2}+\frac{\mathbf{C}+\mathbf{D}}{2}\right)=\frac{\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}+\mathbf{E}}{4}$$

Hasonlóképpen F-nek $\dfrac{\mathbf{B}+\mathbf{C}}{2}$. H-nak $\dfrac{\mathbf{A}+\mathbf{D}}{2}$ a vectoruk, s így FH közepének vectora

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{B}+\mathbf{C}}{2}+\frac{\mathbf{A}+\mathbf{D}}{2}\right)=\frac{\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}+\mathbf{D}}{4}$$

Ezzel a tétel első része igazoltatott.

K-nak $\dfrac{\mathbf{A}+\mathbf{C}}{2}$, L-nek $\dfrac{\mathbf{B}+\mathbf{D}}{2}$ a vectoruk s így KL közepének vectora

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{A}+\mathbf{C}}{2}+\frac{\mathbf{B}+\mathbf{D}}{2}\right)=\frac{\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}+\mathbf{D}}{4}$$

s így EG, FH és KL közepei egy pontba esvén össze, a tétel második része is be van bizonyítva.

11. *Az $OABC$ parallelogrammában tetszésszerint fölvett D ponton át az oldalokkal párhuzamos EF, GH egyeneseket húzunk. Bebizonyítandó, hogy az OC, EH és GP diagonálisok egyazon I ponton mennek keresztül.*

Legyen

$$OA = \mathbf{A},\ \text{tehát}\ OG = m\cdot\mathbf{A}$$

$$OB = \mathbf{B},\ \text{"}\ OE = n\cdot\mathbf{B}$$

Az összeg értelmezése szerint

$$OG + GI = OI$$

$$OG + x\cdot GF = y\cdot OC$$

$$m\mathbf{A} + x\cdot(GA + AF) = y\cdot(OA + AC)$$

$$m\cdot\mathbf{A} + x\cdot\{(OA - OG + OE\}) = y\cdot(OA + OB)$$

az értékek további helyettesítése után:

$$m\mathbf{A} + x(\mathbf{A} - m\mathbf{A} + n\mathbf{B}) = y(\mathbf{A}+\mathbf{B})$$

honnét

$$\{m + (1-m)x - y\}\mathbf{A} + (nx - y)\cdot\mathbf{B} = 0$$

s így

$$m + (1-m)x - y = 0$$

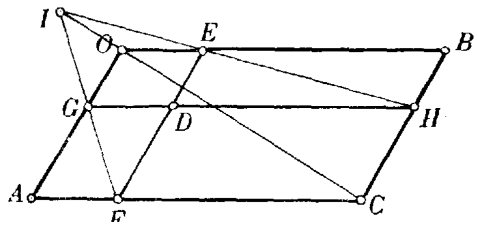
$$nx - y = 0$$

mely egyenletrendszerből

$$x = \frac{m}{m+n-1},\ y = \frac{mn}{m+n-1}.$$

Az utóbbi kifejezés m és n-re vonatkozólag symmetrikus, ha tehát I-t mint OC és EH metszéspontját határozzuk meg, akkor is ugyanerre az eredményre kell jutnunk.

Ezzel a tétel igazolást nyert.



$$IO = y \cdot CO$$

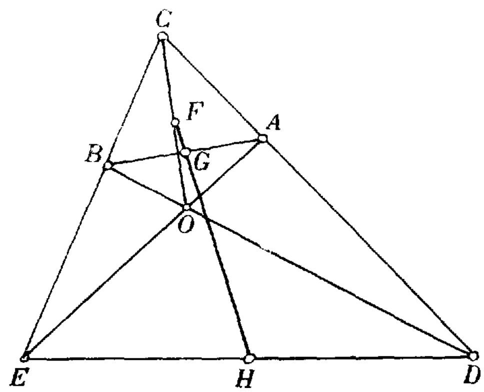
$$IC = IO - CO = (y-1) \cdot OC$$

innét

$$\frac{IO}{IC} = \frac{y}{y-1} = \frac{mn}{(1-m)\cdot(1-mn)}$$

Az m és n számok értelme szerint az $\frac{IO}{IC}$ arány egyenlő az $OABC$ és $OGDE$ parallelogrammák területeinek arányával.

12. *A teljes négyszög három átlójának közepei egyazon egyenesben fekszenek.*



Legyen

$$OA = \mathbf{A},\ OE = m\mathbf{A}$$

$$OB = \mathbf{B},\ OD = n\mathbf{B}$$

akkor

$$OC = OA + AC = OA + x \cdot AD$$

$$OC = OB + BC = OB + y \cdot BE$$

ezekből

$$OA + x \cdot AD = OB + y \cdot BE$$

$$OA + x(OD - OA) = OB + y \cdot (OE - OB)$$

$$\mathbf{A} + x(n\mathbf{B} - \mathbf{A}) = \mathbf{B} + y \cdot (m\mathbf{A} - \mathbf{B})$$

$$(1-x)\mathbf{A} + nx\mathbf{B} = (1-y)\mathbf{B} + my\mathbf{A}$$

s így

$$1 - x = my$$

$$1 - y = nx$$

mely egyenletrendszerből

$$x = \frac{m-1}{mn-1},\ y = \frac{n-1}{mn-1}.$$

Számítás közben kitűnt, hogy

$$OC = \mathbf{A} + x \cdot (n\mathbf{B} - \mathbf{A})$$

s így x értékének helyettesítése, s a kifejezés kellő rendezése után

$$OC = \frac{m(n-1)}{(mn-1)} \cdot \mathbf{A} + \frac{n(m-1)}{mn-1} \cdot \mathbf{B}$$

Minthogy:

$$OF = \frac{1}{2} OC = \frac{1}{2(mn-1)} \{m(n-1)\mathbf{A} + n(m-1) \cdot \mathbf{B}\}$$

$$OG = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{B})$$

$$OH = \frac{1}{2}(OE + OD) = \frac{1}{2}(m\mathbf{A} + n\mathbf{B}),$$

most már FG és GH meghatározására kerülhet a sor.

$$OF + FG + GO = 0$$

$$FG = OG - OF = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - \frac{1}{2(mn-1)} \{m(n-1)\mathbf{A} + n(m-1)\mathbf{B}\} =$$

$$= \frac{1}{2(mn-1)} \{(m-1)\mathbf{A} + (n-1)\mathbf{B}\}$$

$$OG + GH + HO = 0$$

$$GH = OH - OG = \frac{1}{2}(m\mathbf{A} + n\mathbf{B} - \frac{1}{2}\{\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{1}{2}\{(m-1)\mathbf{A} + (n-1) \cdot \mathbf{B}\}$$

E szerint

$$GH = (mn-1)FG$$

ami azt jelenti, hogy az F, G, H pontok egyugyanazon egyenesen fekszenek.

13. *Complanar vectorok.* A vectorok összeadásának értelmezése szerint világos, hogy egy tetszésszerinti zárt polygon oldalait vectorokul tekintvén, azok összege zérus.

Alkalmazzuk a vectorpolygon ezen tételét három egyazon síkban fekvő, tehát *complanar* vectorra. Ha ezek $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$, akkor bebizonyíthatjuk, hogy a, b, c-vel algebrai számokat jelölvén, ezek mindig eleget tesznek az

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = 0$$

egyenletnek.

Ugyanis a vectorok síkjában, vagy más, de ezzel párhuzamos síkban mindig szerkeszthetünk oly háromszöget, amelynek oldalai rendre párhuzamosak az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ vectorokkal, s ennek a háromszögnek kerületi összege

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C}.$$

A complanar vectorok föltételi egyenlete csakis egy módon elégíthető ki.

Mert ha egyúttal

$$a'\mathbf{A} + b'\mathbf{B} + c'\mathbf{C} = 0$$

is állana, akkor $\mathbf{C}$-nek kiküszöbölése után

$$\frac{a}{c}\mathbf{A} + \frac{b}{c}\mathbf{B} = \frac{a'}{c'}\mathbf{A} + \frac{b'}{c'}\mathbf{B}$$

következik, s ebből

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \; \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

más szóval

$$a : a' = b : b' = c : c'$$

s így az a, b, c-vel arányos a', b', c' számok nem tekinthetők önálló értékrendszernek.

Ezek szerint, ha $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ complanarvectorok, akkor

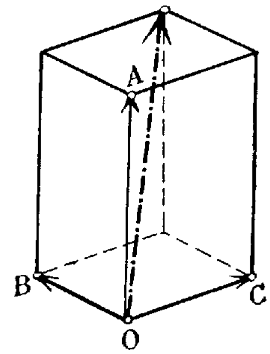
$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = 0;$$

és viszont, ha ez a föltétel fennáll, akkor az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ vectorok complanarok.

Ellenben, ha $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ nem complanar, hanem tetszésszerinti vectorok, akkor

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C}$$

nem lehet zérus, mert annak a parallelepipedonnak átlójával egyenlő, amelyet az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ vectorokkal párhuzamos élekből szerkeszthetünk. Ez a diagonális mindaddig nem lehet zérus, amíg a parallelepipedon három éle rendre zérussá nem válik.



Ha tehát valamely feladat tárgyalásánál arra az eredményre jutunk, hogy az általános helyzetű $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ vectorokra nézve

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = 0$$

áll fenn, minthogy a kérdéses vectorokról tudjuk, hogy nem complanarok, kell, hogy

$$a = 0,\ b = 0,\ c = 0$$

álljon.

Viszont, ha azt találnók, hogy

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = 0$$

de másrészt tudjuk, hogy a, b, c a zérustól különböző számok, akkor ebből az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ vectorok complanar voltára kell következtetnünk.

Ezek az eredmények gyakorlatilag nagyfontosságúak. Első sorban arra használhatjuk fel, hogy a vectort új, sokszor előnyösen alkalmazható alakban állítsuk elő.

Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ az adott $\mathbf{X}$ vectorral complanar, akkor

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + x\mathbf{X} = 0$$

honnét

$$-x\mathbf{X} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$$

vagy $(-x)$-szel osztván:

$$\mathbf{X} = a'\mathbf{A} + b'\mathbf{B}$$

Ha $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ nem complanar vectorok, akkor az $\mathbf{X}$ vector mindig $a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C}$ alakban állítható elő; mert egyebet sem kell tennünk, mint az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ vectorokkal párhuzamos élű olyan parallelepipedont szerkeszteni, melynek az élek közös csúcspontjából kiinduló átlója $= \mathbf{X}$.

Az első eset a vectornak két, adott irányú complanar összetevőkre való szétbontását, a második eset pedig a vectornak három adott irányú összetevőre való szétbontását szolgáltatja.

14. *Annak föltétele, hogy három complanar vector végpontjai egyazon egyenesben feküdjenek.*

Legyenek $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ az adott complanar vectorok, és O a közös kezdőpont. Tehát

$$\mathbf{A} = OA,\ \mathbf{B} = OB,\ \mathbf{C} = OC.$$

Ha az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ pontok egyazon egyenesben fekszenek, akkor

$$AB = x \cdot AC$$

s így

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = x\ \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{A})$$

Ezt a föltételi egyenletet egybevetvén a complanarság föltételeivel

$$a + b + c = 0$$

s így azt mondhatjuk, hogy *az* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ *complanar vectorok végpontjai akkor fekszenek egyazon egyenesben, ha* $a + b + c = 0$.

15. *Annak föltétele, hogy négy pont egyazon síkban feküdjék.*

Legyenek A, B, C, D az adott pontok; hogy egyazon síkban feküdjenek, annak föltétele az, hogy az AB, AC, AD vectorok complanarok legyenek, tehát kielégítsenek egy

$$l \cdot AB + m \cdot AC + n \cdot AD = 0$$

alakú föltételi egyenletet.

A vectorokat az O kezdőpontra vonatkoztatván

$$l(\mathbf{B} - \mathbf{A}) + m(\mathbf{C} - \mathbf{A}) + n(\mathbf{D} - \mathbf{A}) = 0$$

honnét

$$-(l + m + n)\mathbf{A} + l\mathbf{B} + m(\mathbf{C} + n\mathbf{D}) = 0$$

következik.

Itt ismét azt látjuk, hogy az együtthatók összege zérus. Általában tehát négy pont akkor fekszik egyazon síkban, ha

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} + d\mathbf{D} = 0$$

$$a + b + c + d = 0$$

együttesen állanak fenn.

Ha azt akarjuk kifejezni, hogy az A pont benne fekszik a BCD síkban, akkor

$$\mathbf{A} = p\mathbf{B} + q\mathbf{C} + r\mathbf{D}$$

$$p + q + r = 1$$

föltételi egyenletek álljanak.

16. *Az ABC háromszögön belül fölvett tetszésszerinti G pontot összekötjük a háromszög csúcspontjaival. Keressük azt az összefüggést, mely az összekötő vectorok meghosszabbításai következtében a háromszög oldalain keletkező 6 vonaldarab közt fennáll.*

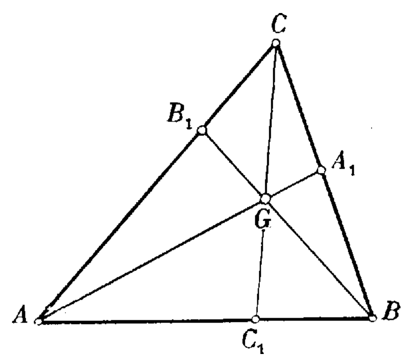
$$GA = a\mathbf{A}$$

$$GB = b\mathbf{B}$$

$$GC = c\mathbf{C}$$

complanar vectorok lévén

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C}.$$



Továbbá

$$GA_1 = \mathbf{A}_1 = x\mathbf{A}$$

$$GB_1 = \mathbf{B}_1 = y\mathbf{B}$$

$$GC_1 = \mathbf{C}_1 = z\mathbf{C}$$

s így

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}_1}{x}, \ \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}_1}{y}, \ \mathbf{C} = \frac{\mathbf{C}_1}{z}$$

Ha a complanarság föntebbi föltételi egyenletébe $\mathbf{A}$ helyébe az $\dfrac{\mathbf{A}_1}{x}$ értéket helyettesítjük, akkor

$$\frac{a}{x}\mathbf{A}_1 + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = 0$$

azt fejezi ki, hogy az A_1BC vectorok is complanarok. De ezen vectorok A_1, B, C végpontjai ezenfelül egyazon egyenesben is fekszenek, tehát

$$\frac{a}{x} + b + c = 0$$

ugyanígy:

$$a + \frac{b}{y} + c = 0$$

$$a + b + \frac{c}{z} = 0$$

Ezen egyenletrendszerből

$$x = -\frac{a}{b+c}$$

$$y = -\frac{b}{a+c}$$

$$z = -\frac{c}{a+b}$$

minélfogva

$$\mathbf{A}_1 = -\frac{a\mathbf{A}}{b+c}$$

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{b\mathbf{B}}{a+c}$$

$$\mathbf{C}_1 = -\frac{c\mathbf{C}}{a+b}$$

vagy másképpen

$$\mathbf{A}_1 = -\frac{b\mathbf{B} + c\mathbf{C}}{b+c}$$

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{c\mathbf{C} + a\mathbf{A}}{a+c}$$

$$\mathbf{C}_1 = -\frac{c\mathbf{A} + b\mathbf{B}}{a+b}$$

Az utóbbi három egyenlet még így is írható:

$$b(\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}) = c(\mathbf{C} - \mathbf{A}_1)$$

$$c(\mathbf{B}_1 - \mathbf{C}) = a(\mathbf{A} - \mathbf{B}_1)$$

$$a(\mathbf{C}_1 - \mathbf{A}) = b(\mathbf{B} - \mathbf{C}_1)$$

honnét

$$\frac{\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}}{\mathbf{C} - \mathbf{A}_1} = \frac{c}{b}, \ \frac{\mathbf{B}_1 - \mathbf{C}}{\mathbf{A} - \mathbf{B}_1} = \frac{a}{c}, \ \frac{\mathbf{C}_1 - \mathbf{A}}{\mathbf{B} - \mathbf{C}_1} = \frac{b}{a}$$

vagy

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b}, \ \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{a}{c}, \ \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{b}{a}$$

s így szorzatuk

$$\frac{BA_1 \cdot CB_1 \cdot AC_1}{A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B} = 1$$

a keresett feltételi egyenlet, melyben *Ceva* tételére ismerünk.

17. *Collinear háromszögek.* Ha azok az egyenesek, melyek két háromszögnek megfelelkező csúcspontjait kötik össze, egy pontban találkoznak, akkor a megfelelkező oldalak metszéspontjai egyazon egyenesben fekszenek.

Az ilyen háromszögeket *collinear*oknak hívjuk, a csúcspontokon átmenő transversálisok metszéspontja a *collineatió centruma*, a megfelelkező oldalok metszéspontjainak egyenese a *collineatió tengelye.*

A collineatió, mint általános geometriai rokonság minden speciálisabb jellegű rokonságot magában foglal.

Ha a collineatio centruma a végtelenben fekszik, tehát a collineatió sugarai párhuzamosak, akkor a rokonság átmegy az *affinitásba.*

Ha a collineatió tengelye a végtelenben fekszik, tehát a megfelelkező egyenesek párhuzamosak, akkor a *hasonlóság*, ha pedig mind a centrum, mind pedig a tengely a végtelenben vannak akkor az *egybevágóság* lép fel.

A vectorgeometria segítségével az előrebocsátott tételt következőképpen bizonyítjuk be.

$$OA = \mathbf{A} \qquad OA' = m\mathbf{A}$$

$$OB = \mathbf{B} \qquad OB' = n\mathbf{B}$$
$$OC = \mathbf{C} \qquad OC' = p\mathbf{C}$$

a collinear helyzet feltételei.

$$\mathbf{F} = OF = OA + AF = OA + z \cdot BA = OA' + z' \cdot B'A' =$$
$$= \mathbf{A} + z \cdot BA = OA' + z' \cdot B'A' =$$
$$= \mathbf{A} + z(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = m\mathbf{A} + z'(m\mathbf{A} - n\mathbf{B})$$

innét

$$(1+z)\mathbf{A} - z\mathbf{B} = m\mathbf{A} + z'(m\mathbf{A} - n\mathbf{B}),$$

tehát

$$1 + z = m(1 + z')$$
$$z = nz'$$

honnét

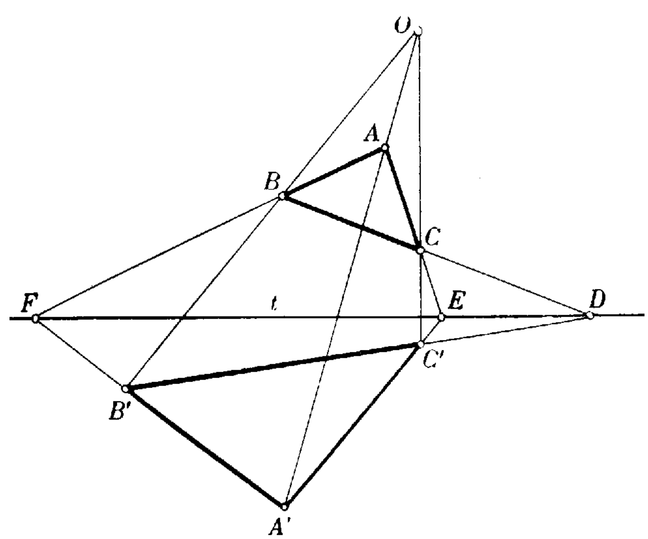
$$z = \frac{(m-1)n}{n-m}$$

s így

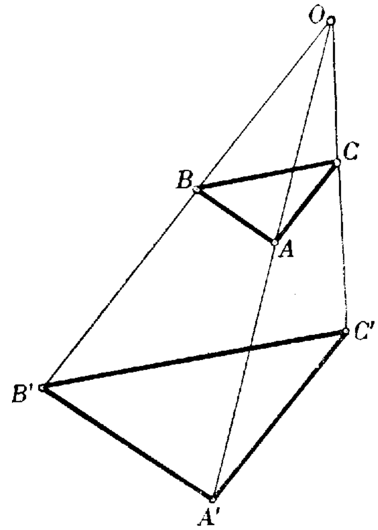
$$\mathbf{F} = \left(1 + \frac{(m-1)n}{n-m}\right)\mathbf{A} - \frac{(m-1)n}{n-m}\mathbf{B}$$
$$\mathbf{F} = \frac{-m(n-1)\mathbf{A} + n(m-1)\mathbf{B}}{n-m}$$
$$\mathbf{D} = \frac{-n(p-1)\mathbf{A} + p(n-1)\mathbf{C}}{n-p}$$
$$\mathbf{E} = \frac{-p(m-1)\mathbf{C} + m(p-1)\mathbf{A}}{p-m}$$

Ha

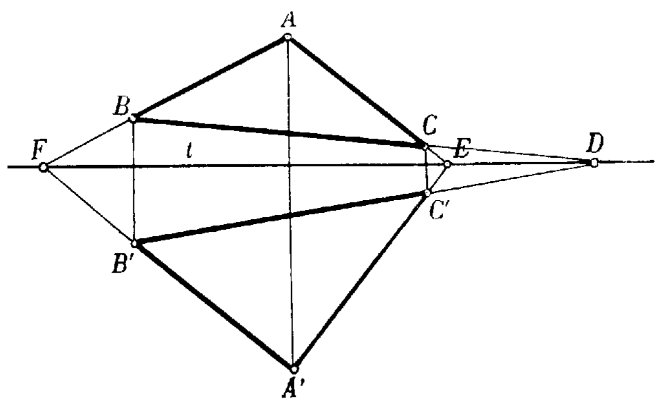
$$f = (m-n)(p-1)$$
$$d = (n-p)(m-1)$$
$$e = (p-m)(n-1)$$



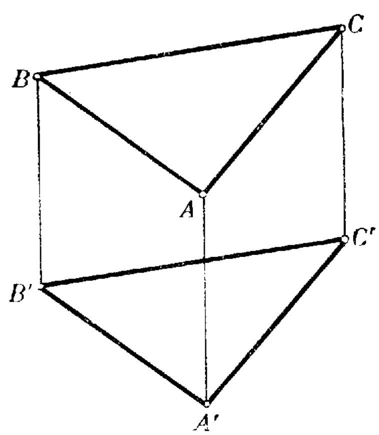
Collineatio.



Hasonlóság.



Affinitás.



Egybevágóság.

jelöléseket alkalmazunk, akkor

$$d\mathbf{D} + e\mathbf{E} + f\mathbf{F} = 0$$

$$d + e + f = 0$$

azt mutatja, hogy D, E és F egyazon egyenesben fekszenek. Tényleg

$$d + e + f = mp - np - m + n + mn - mp - n + p + pn - mn - p + m = 0.$$