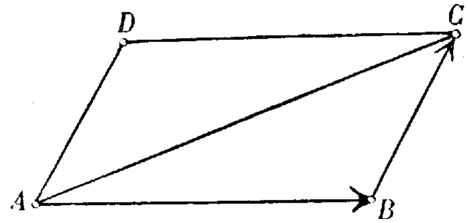
3. *Nem párhuzamos vectorok összeadása és kivonása.* Az AB és BC vectorok összegéül azt az AC vectort tekintjük, mely az AB és BC elmozdulásoktól alkotott parallelogrammának A-tól kiinduló átlója.



Ezen értelmezés alapján a vectorok összeadása commutatív művelet. Az összeg tensora azonban általában nem egyenlő a tagok tensorainak összegével.

A kivonás művelete ezzel szintén értelmezve van. Mert ha

$$AB + BC = AC$$

akkor viszont

$$AC - AB = AC + BA$$
$$= BA + AC = BC.$$

Ezen értelmezéseinkkel minden vectortermészetű mennyiség (elmozdulás, sebesség, gyorsulás, erő, tengelynyomaték stb.) összetevése és szétbontása elintézést nyert.

Közvetlenül világos az is, hogy két különböző irányú vector különbsége sohasem lehet zérus.

Innét következik, hogy *ha* $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ *különböző irányú vectorok közt az* $m\mathbf{A} + n\mathbf{B} = \mathbf{0}$ *összefüggés áll fenn, hol* m és n *valós számokat jelentenek, akkor szükségképpen* $m = 0$ *és* $n = 0$.

Ezt az eredményt kissé általánosíthatjuk.

Ha

$$m\mathbf{A} + n\mathbf{B} = p\mathbf{A} + q\mathbf{B}$$

akkor

$$(m-p)\mathbf{A} + (n-q)\mathbf{B} = \mathbf{0}$$

s ez csak úgy állhat, ha $m = p$ és $n = q$.

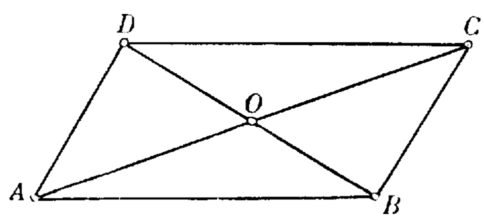
Eddigi ismereteinket már is felhasználhatjuk arra, hogy velük a gyakorlat terére lépjünk.

4. *A parallelogramma átlói felezik egymást.*

$AO = x \cdot AC$ és $BO = y \cdot BD$ tehető, s most már arra kell törekednünk, hogy az $x,\ y$ ismeretleneket meghatározzuk.

$$AO = AB + BO$$

$$x \cdot AC = AB + y \cdot BD$$
$$x \cdot (AB + BC) = AB + y \cdot (BC + CD)$$



Tekintetbe véve, hogy

$$BC + CD = BC - DC = BC - AB$$

tehát

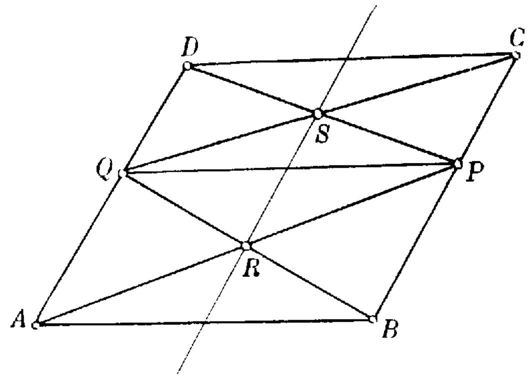
$$x \cdot (AB + BC) = AB + y \cdot (BC - AB)$$
$$(x + y - 1) \cdot AB + (x - y) \cdot BC = 0$$

honnét

$$x + y - 1 = 0$$
$$x - y = 0$$

mely egyenletrendszerből $x = y = \dfrac{1}{2}$. Így tényleg $AO = \dfrac{1}{2}AC$ és $BO = \dfrac{1}{2}BC$.

5. *Az $ABCD$ parallelogrammát AB-vel párhuzamosan QP egyenessel metsszük. Bebizonyítandó, hogy QC és DP-nek S, AP és QB-nek R metszéspontjait egy a BC oldallal párhuzamos egyenes köti össze.*



$$RS = QS - QR = \frac{1}{2}QC - \frac{1}{2}QB = \frac{1}{2}(QC - QB)$$

De másrészt

$$QB + BC = QC$$

honnét

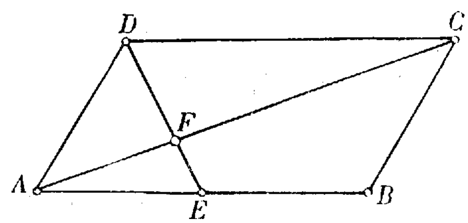
$$BC = QC - QB.$$

Így tehát

$$RS = \frac{1}{2}BC$$

ami állításunkat igazolja. (Lásd: 2. p.)

6. *Ha az $ABCD$ parallelogramma AB oldalának E közepét D-vel összekötjük, akkor ED és AC egymást kölcsönösen a harmadrészükben metszik.*



Legyen

$$AB = \mathbf{B},$$

$$AD = \mathbf{D}.$$

Minthogy

$$AF = x \cdot AC = x(AB + BC)$$

$$EF = AF - AE = y \cdot ED$$

$$EF = x(AB + BC) - AE = y(AD - AE)$$

$$x(\mathbf{B} + \mathbf{D}) - \frac{\mathbf{B}}{2} = y\left(\mathbf{D} - \frac{\mathbf{B}}{2}\right)$$

$$\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{2}\right)\mathbf{B} + (x - y)\mathbf{D} = 0$$

innét

$$x + \frac{y}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$x - y = 0$$

tehát

$$x = y = \frac{1}{3}$$

ennélfogva

$$AF = \frac{1}{3}AC,$$

$$EF = \frac{1}{3} ED.$$

7. *A háromszög súlyvonalai egy pontban találkoznak, s a súlypont a csúcsoktól számítva a súlyvonalak* $\frac{2}{3}$*-ában fekszik.*

Megállapodásaink szerint

$$AB = \mathbf{B} \text{ és } AC = \mathbf{C}$$

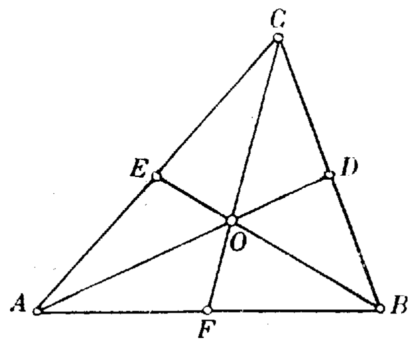
jelölést használva

$$BC = AC - AB = \mathbf{C} - \mathbf{B}$$

$$AE = \frac{1}{2}\mathbf{C}$$

$$AF = \frac{1}{2}\mathbf{B}$$

$$BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{B}).$$



Ezen jelölések bevezetése után

$$AO = x \cdot AD = x \cdot (AB + BD) = \frac{x}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{C}),$$

$$BO = y \cdot BE = y \cdot (AE - AB) = y \cdot \left(\frac{\mathbf{C}}{2} - \mathbf{B}\right)$$

Az összeadás értelmezése szerint

$$AO = AB + BO$$

$$\frac{x}{2} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{B} + y \cdot \left(\frac{\mathbf{C}}{2} - \mathbf{B}\right)$$

$$\left(\frac{x}{2} + y - 1\right)\mathbf{B} + \frac{x - y}{2}\mathbf{C} = \mathbf{0},$$

honnét

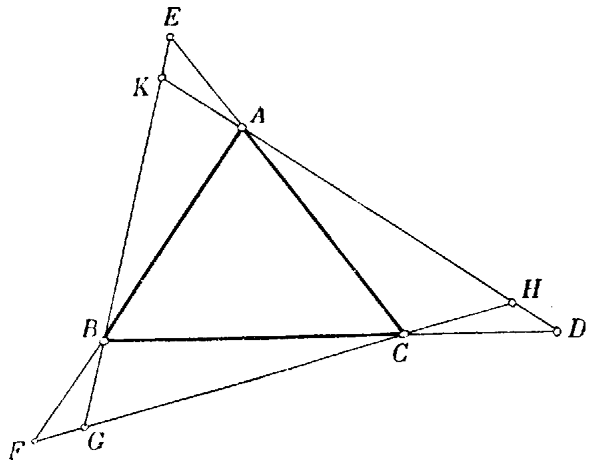
$$\frac{x}{2} + y - 1 = 0 \quad \text{és} \quad x - y = 0,$$

mely egyenletrendszerből $x = y = \frac{2}{3}$.

Így tehát $AO = \frac{2}{3}AD$ és $BO = \frac{2}{3}BE$.

AD és CF metszéspontja ugyanezt az eredményt adván, a három súlyvonal tényleg egy ponton megy át.

8. *Az ABC háromszögnek AB, BC, CA oldalait illetőlegesen F, D, E-ig az oldalak fél hosszúságával meghosszabbítván, határozzuk meg az AD, BE, CF egyenesek G, H, K metszéspontjait.*



Legyen

$$BC = 2\mathbf{A},\ CA = 2\mathbf{B},$$

akkor

$$BD = 3\mathbf{A} \text{ és } CE = 3\mathbf{B}.$$

$$BK = x \cdot BE = x \cdot (BC + CE) = x \cdot (2\mathbf{A} + 3\mathbf{B})$$

Másrészt

$$BK = BD + DK = BD + y \cdot DA = BD + y \cdot (CA - CD) = 3\mathbf{A} + y \cdot (2\mathbf{B} - \mathbf{A})$$

Ezen két érték összehasonlítása alapján

$$x \cdot (2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}) = 3\mathbf{A} + y \cdot (2\mathbf{B} - \mathbf{A})$$

$$(2x + y - 3) \cdot \mathbf{A} + (3x - 2y)\mathbf{B} = 0$$

honnét

$$2x + y - 3 = 0$$

$$3x - 2y = 0$$

tehát

$$x = \frac{6}{7},\ y = \frac{9}{7}.$$

E szerint

$$BK = \frac{6}{7}BE$$

$$EK = \frac{1}{7}EB$$

$$FG = \frac{1}{7}FC$$

$$DH = \frac{1}{7}DA.$$

Ha BE-t adottnak vesszük, akkor az idomot B- és E-ből kiindulva megszerkesztvén, BE-nek $\frac{1}{7}$ találhatjuk.