A geometria terén a legtermékenyebb korszak *Descartes* munkálkodásával, vagyis az analitikai módszer megalkotásával veszi kezdetét. Ez tette lehetségessé hogy a geometria felhasználhatta az infinitesimális számítás eredményeit, viszont a maga szemlélhetőségével ezt a tudományágat segítvén át a kezdet nehézségein. Innét kezdve geometria és analysis szorosan egymás mellett haladtak előre, mindaddig, míg az izmosabb és életrevalóbb analysis az összes érdeklődést majdnem kizárólag a maga részére foglalta le, s a szerényebb eszközökkel dolgozó geometriát teljesen háttérbe nem szorította. *Abel, Jacabi, Lagrange, Cauchy* idejében a geometria valóban csak türelmes kísérleti objektum volt, mely kénytelen-kelletlen tűrte, hogy az analysis módszereit rajta keresztül próbálják, s akkor sem volt szabad tiltakoznia, ha ezek a módszerek természetének sajátosságával éppenséggel nem állottak összhangzásban. Így aztán a geometriában is az analysis vált uralkodóvá, s a rengeteg számítások közepette a geometriai mag valósággal eltűnni látszott.

Ez a körülmény a geometria néhány hivatott művelőjét, kik között különösen *Monge, Chasles, Poncelet, Moebius, Steiner* és *von Staudt* említendők első sorban, arra késztette, hogy a geometriát az analytikai ballasttól megszabadítsák, más szóval: geometriai módszereket teremtsenek, melyek a tárgy természetéből folyván, ahhoz szorosan alkalmazkodjanak, s a kutatás számára új irányokat mutassanak. Ezek a törekvések teljes sikerrel jártak. Az ábrázoló geometria általában, különösen pedig a *centrális proiectió* a geometriai rokonságok (affinitas, proiectivitas, reciprocitas stb.) vizsgálatára vezetett, s a homogen coordináták segítségével ezen tulajdonságok analytikailag is megközelíthetőkké váltak. *Steiner* teljesen függetleníteni akarta a geometriát az analytikus módszerektől, híres kortársa *von Staudt*, pedig a metrikus viszonylatokat is mellőzendőknek tartotta, s kizárólag a proiectív tulajdonságok kutatására szorítkozott.

Ezzel beállott volna a geometria és az analysis között a tökéletes szakítás, és innét kezdve mindkét tudományszak tisztán a maga útjain a saját céljai felé haladt volna.

Voltak azonban közös területek, amelyeken találkozniok és együtt működniök kellett. Ha nem számítjuk a csillagászat, a fizika, a geodaesia és számos egyéb tudomány mathematikai szükségleteit, akkor az elemi mathematikára kell hivatkoznunk, melynek az a hivatása, hogy a mathematika számára hivatott művelőket neveljen, mert a mathematikusra csak részben áll az, amit a költőkről mondanak. A mathesisre nemcsak születni, de nevelődni is kell.

Az elemi mathesis terén a két irány még ridegebben szétvált egymástól, és nem is igen törekedtek arra, hogy a mathesis zsenge művelői ne vegyék észre, hogy szüleik tulajdonképpen elválva élnek. Ezek a viszonyok részben még ma is fennállanak, mit főként az iskolák számára készült tantervek, s az azok alapján álló tankönyvirodalomnak tulajdoníthatni. Ez az állapot is egészségtelen, s a legkevésbé sem természetes.

A múlt század 40-es éveiben egymástól függetlenül egyszerre hárman léptek föl a *geometriai calculus* módszerével, célul tűzvén ki azt, hogy a mathesis két ága egyesíttessék, anélkül, hogy akár az egyik, akár a másik természetének meg nem felelő módon tárgyaltassék.

A német *Grassmann* 1844-ben adta ki *"Lineale Ausdehnungslehre"* című alapvető művét, melyben az algebrát és geometriát közös alapon tárgyalja, s a mathesist az elemi fokon egységesíti.

Az angol W. R. *Hamilton* 1853-ban lépett föl *"Lectures on quaternions"* című művével, s egy minden ízében kész rendszerrel lepte meg a tudományos világot.

Mindkettőt megelőzte az olasz *Bellavitis*, aki 1833-tól 1837-ig teljesen kifejtette az aequipollentiák elméletét.

Mindezek a geometriai calculusok lényegüket illetőleg azonosak, köztük csupán formális különbségek állapíthatók meg. A tudományos világ előlük közös értelemmel elzárkózott, velük szemben visszautasítólag viselkedett, s így viselkedik még most is. Egyedül *Hamilton* módszerének vannak művelői, mert ő a mathesist csupán a módszer megállapítására használta, s midőn ezzel elkészült, azt rögtön a fizikára alkalmazta. Híres honfitársai, *Tait, Maxwell, Lord Kelvin* e tekintetben buzgón követik, úgyannyira, hogy műveiket a quaterniók ismerete nélkül nem is lehet teljesen nyomon követni.

Ez a visszautasítás kizárólag kényelmi szempontokra vezethető vissza. Ezt legjobban *Gauss* szavaival lehel igazolni, ki a geometriai calculusokról illetékesen ítélkezett. Mikor *Moebius* barycentrikus calculusát elolvasta, a következőket írta (1843-ban) barátjának *Schulmachernek*:

" Minden geometriai calculussal úgy állunk, hogy azok semmi olyasmire nem képesek, amire nélkülök képesek ne volnánk; előnyük azonban, hogy ha egy ilyen geometriai calculus sokszor jelentkező szükségletek legbelső lényegével megegyező, akkor az, aki benne teljesen otthonossá vált, a lángésznek öntudatlan inspiratióit melyeket kierőszakolni végtére is lehetetlen a körükbe illő feladatok megoldásánál nélkülözheti, sőt olyan bonyolódott esetekben is majdnem gépiesen megoldhatja a feladatot, amikor különben a lángész sem boldogul inspiratio nélkül".

Ebben kétségtelenné van téve a geometriai calculusok létjogosultsága. De hivatkozhatunk arra is, hogy ezek a kutatást minden irányban éppen úgy megkönnyítik, mint a logarithmusok alkalmazása a numerikus számításokat. Erről az alább következőkben eléggé meggyőződhetünk.

Legközelebbi célom a K. M. L. olvasóit az összes geometriai calculusok egy közös és alapvető fejezetével, a vectorgeometriával megismertetni. Aki fejtegetéseimet figyelemmel kíséri, könnyű szerrel oly módszerben válik járatossá, melyet a tárgyalt feladatok keretén túl is haszonnal alkalmazhat. Fejtegetéseimben különösen *Lauisant* művére (Introduction la méthode des quaternions, Paris 1881. Gauthier-Villars) fogok támaszkodni azt egyben-másban egyéb forrásokból merített részletekkel egészítvén ki. Hogy munkám haszonnal járjon, arra fogok törekedni, hogy a tárgy megértését lehetőleg megkönnyítsem. Ezért néhol terjedelmesebb lesz a tárgyalás, mint az okvetlenül szükséges; de hiszen e sorok nem iskolázott, hanem iskolázó mathematikusoknak szólanak.

1. *Értelmezések és jelölések.* A pont egyenes vonallá elmozdulását *vector*-ral jellemezhetni. Ha A a pont kezdetleges,

B pedig végső helyzete, akkor az AB vector azon vonaldarab, mely irány, nagyság és értelem tekintetében meghatározza a pont elmozdulását.

Ha a vectort két betűvel jelöljük, akkor első helyre a kezdetpont betűjét írjuk. Ily módon a vector *értelmét* illetőleg kétség nem foroghat felnn.

Ha a pont az első elmozdulás után ugyanazon irányban és értelemben ugyanannyival tovább mozog, akkor azt mondhatjuk, hogy $BC = AB$.

Itt az egyenlőségi jel többet fejez ki, mint különben kifejezni szokott; mert a vector hosszúságán kívül az irány és értelem azonosságát is jelenti. Ezért *Bellavitis* helyette más jelet használ, s nem szól egyenlőségről, hanem a jelzett vonatkozást *aeuipollentiá*nak hívja.

Két egyenlő hosszúságú, egyező irányú és egyező értelmű vonaldarabot, mint vectorokat akkor is egyenlőknek tekinthetünk, ha azok nem esnek egymás meghosszabbításába, hanem a térben tetszés szerint vannak elhelyezve.

Ebben az esetben $AB = CD$ egyúttal a parallelogramma ismeretes tulajdonságait foglalja magában.

Ha egy feladatban több, a térben különféleképpen elhelyezett vector szerepel, akkor azokat önmagukkal párhuzamosan egy O közös kezdőponthoz helyezhetjük át. Ily esetekben a vectorokat a végpontjaikat jelző betűkkel jelölhetjük. E szerint

$$CD = OA = A$$

A vector hosszúságát *modulus*nak vagy *tensor*nak hívjuk.

Közvetlenül világos, hogy a BA vector AB-vel nagyság és irány tekintetében megegyezik ugyan, de vele ellenkező értelmű. Az elmozdulásokra való tekintettel $AB + BA = 0$, s így $BA = -AB$.

2. *Műveletek.* Egyező irányú vectorokkal az első négy alapműveletet, a szorzás némi megszorításával, a fennálló szabályok szerint végezhetjük el.

Az összeadásra és kivonásra vonatkozólag:

$$AC = AB + BC$$

$$AC - AB = BC$$

Innét *az egész számmal való szorzásra* egyszerűen áttérhetünk. Vectornak vectorral való szorzását illetőleg értelmezést nem adunk. Az osztást illetőleg áll a következő tétel: két párhuzamos vector aránya egyenlő modulusaik arányával; az arány pozitív, illetőleg negatív, aszerint, amint a vectorok egyező, illetőleg ellenkező értelműek.

Az összes párhuzamos vectorokat egy valós szám és egy vector szorzataként állíthatjuk elő. Viszont $m_1 \cdot \mathbf{A}$, $m_2 \cdot \mathbf{A}$ ... párhuzamos vectorokat jelentenek.

E szerint az $\mathbf{A}$-tól eltérő irányú vectort már nem lehet $p \cdot \mathbf{A}$ alakjában írnunk, hol p valós számot jelent, hanem jelölésére más betűt kell alkalmaznunk, pl. $p \cdot \mathbf{B}$-t.

Röviden: *párhuzamos vectorok esetében az első négy alapművelet algebrai szabályai érvényben maradnak.*

Azt a vectort, melynek hosszúsága egyenlő a választott hosszúság-egységgel, *egységvector*nak hívjuk.