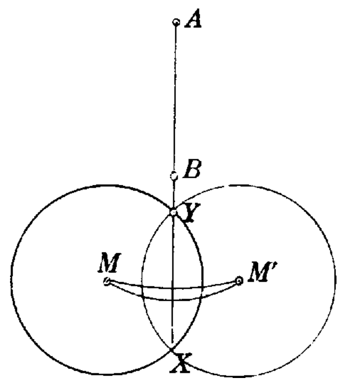
IV. Pusztán körzővel keresztülvihető szerkesztések.

Pusztán körzővel közvetlenül csak a 4. és 7. alapszerkesztés végezhető el, míg az 5. és 6. csak akkor, ha az egyeneseket megrajzolva adták meg. Feladatunk tehát, hogy kimutassuk, hogy az 1., 2., 3., 5. és 6. alapfeladatok mindenkor visszavezethetők a 4. és 7.-re.

3. és 6. alapfeladat: Adva van a p egyenesnek két pontja A és B; keressük ezen egyenes és valamely kör metszéspontjait.

Megoldás: Ha a kör középpontja M, akkor az AM, illetőleg BM sugarakkal A, illetőleg B körül vont körívek messék egymást M'-ben. Az M' körül az M kör sugarával rajzolt kör az M kör tükörképe és így e két kör X és Y metszéspontjai rajta vannak az A és B egyenesen is.



Az X és Y tehát az M kör és az AB egyenes metszéspontjai.

5. alapfeladat. Az A és B pontjaival megadott egyenesre vigyük fel A-tól a megadott CD távolságot.

Megoldás: A megadott CD távolságot körzőnyílásba vesszük és vele A körül kört rajzolunk. Ha e kört az AD egyenes (3. és 4.) az X és Y pontokban metszi, akkor:

$$AX = AY = CD.$$

1. segédszerkesztés. Adott AB egyenessel adott P ponton át párhuzamos vonandó.

Megoldás: Ha a PA sugárral B körül és az AB sugárral P körül rajzolt körívek egymást Q-ban metszik, akkor a P, Q pontok meghatározzák a keresett párhuzamost.

2. segédszerkesztés. Adott AB távolságot kétszerezzünk meg ugyanazon egyenesen, ha a távolságnak csak a végpontjai ismeretesek.

Megoldás: B körül a BA sugárral kört vonunk, melynek kerületére A-tól számítva háromszor rávisszük a BA sugarat; az utolsó osztási pontot C-vel jelölve:

$$AC = 2 \cdot AB.$$

Eme eljárás többszöri alkalmazásával megszerkeszthető olyan N pont, – n egész számot jelentvén– hogy

$$AN = n \cdot AB.$$

4. segédszerkesztés. Keressük három távolsághoz a negyedik mértani arányost.

Megoldás: Legyenek az adott távolságok a, b, c és keressük azt az x távolságot, melyre nézve:

$$a : b = c : x.$$

Az általánosság rovása nélkül feltehetjük, hogy

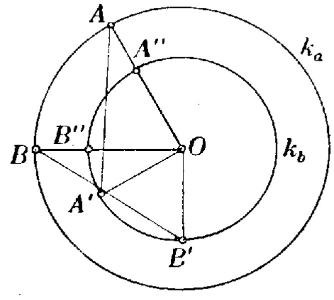
$$a > c,$$

mert $a > c$ esetében mindig vehetünk olyan n egész számot, hogy na nagyobb legyen c-nél és az esetben az na-, nb- és c-hez keressük a negyedik mértani arányost:

$$na : nb = c : x.$$

Rajzoljunk már most O körül az a és b sugarakkal két koncentrikus kört k_a-t és k_b-t. Legyenek A és B a k_a-n, úgy hogy

$$AB = c.$$



Tetszőleges egyenlő távolsággal köríveket rajzolunk A és B körül, melyek k_b-t A' és B'-ben metszik, akkor $A'B'$ lesz a keresett negyedik arányos.[1]

Bizonyítás. Messék OA és OB a k_b-t az A'' és B'' pontokban. Könnyen belátható, hogy oldalaik egyenlősége miatt az AOA' és BOB' háromszögek egybevágók, tehát:

$$AOA'\sphericalangle = BOB'\sphericalangle$$

Ha tehát az $A'OB'$ háromszöget O körül az AOA' szöggel elforgatjuk, az $A''OB''$ háromszöget kapjuk, mely hasonló lévén az AOB háromszöghöz:

$$AO : BO = AB : A''B''$$

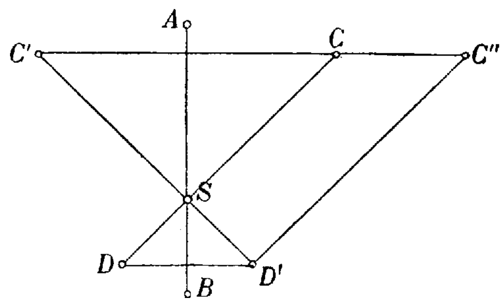
és így

$$AO : BO = AB : A'B'.$$

2. alapfeladat. Keressük az A és B, illetőleg a C és D pontok által adott két egyenes metszéspontját S-et.

Megoldás.[2] Jelöljük a C és D pontok tükörképeit az AB egyenesre vonatkozólag C' és D'-vel és messe D'-ből a CD-vel vont párhuzamos CC'-t a C''-ben, akkor:

$$C'C'' : C'D' = C'C : C'S.$$



Ám a C'' az 1. mintájára megszerkeszthető, mert hiszen $CDD'C''$ parallelogramma, tehát a $C'C''$, $C'D'$, $C'C$ ismert távolságok és így $C'S$ a 4. alapján megszerkeszthető. Ha pedig $C'S$-et ismerjük, akkor az S pont helyzetét nyerjük, ha C'-től a $C'D'$-re a $C'S$ távolságot rávisszük.

Összefoglalás: Pusztán körzővel mind a 7 alapfeladat megoldható, tehát az összes mértani szerkesztések pusztán körzővel is elvégezhetők.

[1] L. Mascheroni szerkesztése.
[2] L. Mascheroni szerkesztése.