

III. A középpontjával együtt megrajzolt kör síkjában vonalzóval keresztülvihető szerkesztések.

Mint hogy vonalzó rendelkezésünkre áll, azért az első három alapszerkesztés közvetlenül elvégezhető, míg a többi (4 – 7) alapszerkesztés amazokra a középpontjával (O) együtt megrajzolt kör (K) segítségével visszavezethető.

1. *Segédszerkesztés. Adott P ponton át adott p egyenessel párhuzamos vonandó.*

Megoldás: (a) A p egyenes átmegy az O -n.

Ez esetben a p egyenesnek a K körrel való metszéspontjait A és B -vel jelölve

$$AO = OB,$$

tehát a párhuzamos megvonható. (I. 2. f.)

(b) *A p egyenes metszi a K -t a C és D pontokban.*

Ha CO illetve DO a K kört még egyszer C_1 illetve D_1 -ben metszik, akkor

$$CD \parallel C_1D_1,$$

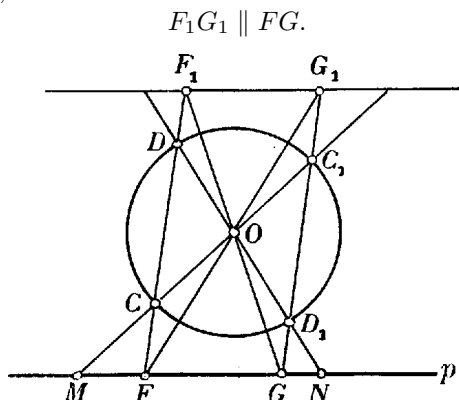
tehát CD -n kijelölhető (I. 3. f.) olyan E pont, hogy

$$CE = ED$$

legyen. De ekkor (I. 2. f.) P -n át máris rajzolható CD -vel párhuzamos.

(c) *A p -nek tetszőleges helyzete van.*

A p -nek két tetszőleges pontját M -et és N -et összekötjük O -val, mely egyenesek a K kört a C, C_1 , illetve a D, D_1 pontokban metszik. Messe CD , illetve C_1D_1 a p -t az F , illetve G pontokban és FO , illetve GO a C_1D_1 -et, illetve a CD -t a G_1 , illetve F_1 -ben, akkor



$$F_1G_1 \parallel FG.$$

Megrajzolható tehát (I. 3. f.) az FG felezéspontja H is, miáltal feladatunk (I. 2. f.) megoldottnak tekinthető.

(5). *alapfeladat. Adott p egyenesre adott P pontjától adott AB távolságot kell rajzolnunk.*

Megoldás: (a) Ha AB párhuzamos a p -vel, akkor a B -ből az AP -vel rajzolt párhuzamos a p -n olyan Q pontot metsz ki, melyre:

$$PQ = AB.$$

(b). *Ha AB hajlik a p -hez, akkor O -n át húzunk p -vel, illetve AB -vel párhuzamos sugarakat, melyek a k -t C , illetve D -ben metszik. Messe az OA -val a B -ből vont párhuzamos az OD -t E -ben, akkor E -ből a CD -vel vont párhuzamos az OD -t olyan F pontban metszi, hogy*

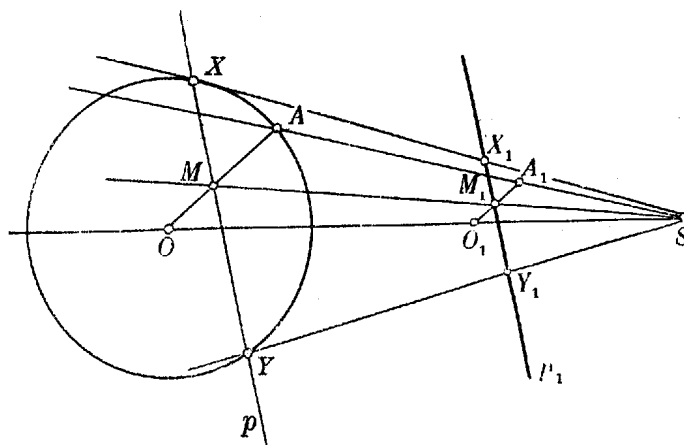
$$OF = OE = AB.$$

Az OF már most párhuzamosokkal könnyen átvihető a p -re.

(c). *Ha AB rajta van a p -n, akkor először e távolságot kivisszük egy a p -vel párhuzamos tetszőleges egyenesre és ebből (a) szerint átvisszük p -re.*

A 4°. *alapfeladat* itt abból áll, hogy adott M pont körül tetszésszerűen számú adott AB -vel egyenlő távolságot lemérünk.

(6). *alapfeladat. Adva van valamely kör O_1 középpontja és O_1A_1 sugara; keressük e kör és adott p_1 egyenes metszéspontjait.*



*Megoldás.*¹ E feladatot legegyszerűbben a hasonlósági transzformáció segítségével oldhatjuk meg. Hasonlósági pont gyanánt az O és O_1 körök külső hasonlósági pontja szolgálhat, mely így nyerhető:

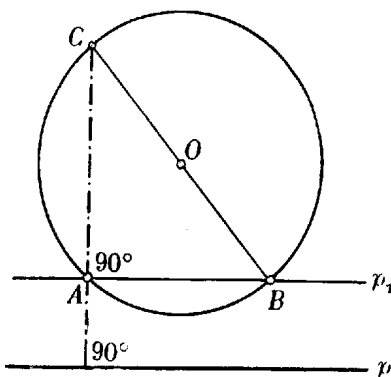
O_1A_1 -gyel az O -ból párhuzamosan vont sugár messe a K -t A -ban, akkor AA_1 az OO_1 centrálisát a keresett külső hasonlósági pontban S -ben metszi.

Messe p_1 az O_1A_1 egyenest M_1 -ben, akkor SM_1 az OA egyenest az M_1 -nek megfelelő M pontban metszi. Ám a hasonlósági transzformációnál a megfelelő egyenesek párhuzamosak, azért az M -en át p_1 -gyel vont párhuzamos p a p_1 egyenes megfelelő egyenese ezen transzformációban. Ha már most p a K -t az X és Y pontokban metszi, akkor SX , illetőleg SY a p_1 egyenest a keresett X_1 , illetőleg Y_1 metszéspontokban metszi.

(2). *Segédszerkesztés. Adott (p) egyenesre merőleges rajzolandó.*

Megoldás. (a) Ha p metszi a K kört az A és B pontokban és BO a K kört még egyszer C -ben, akkor CAB szög derékszög lévén CA merőleges a p -re.

(b) Minden más esetben húzunk a p -vel párhuzamosan olyan p_1 egyenest, mely a K kört két pontban metszi, miáltal ez az eset az előbbire vissza van vezetve.



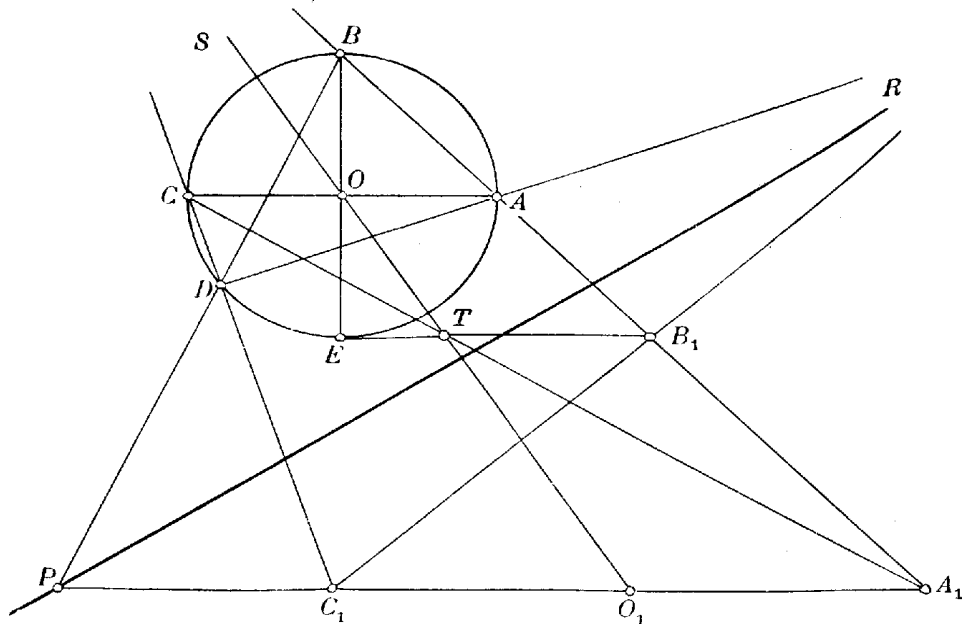
(7). *alapfeladat. Adva van két kör középpontja (O_1 és O_2) és két sugara (O_1A_1 és O_2A_2); szerkesszük meg a két kör metszéspontjait.*

*Megoldás.*² (a) *Az O_2 kör összeesik a sík fix O körével.*

Húzzunk O -ból párhuzamosat az O_1A_1 -gyel, mely az adott kört az A és C pontokban messe. Az AA_1 illetőleg az A_1C egyenesek tehát a két kör OO_1 centrálisát az S külső, illetőleg a T belső hasonlósági pontokban metszik. Messe AA_1 az O kört még egyszer B -ben, melynek az O -ra vonatkozó diametrálpontját jelöljük E -vel, az ET és AA_1 egyenesek metszéspontját pedig B_1 -gyel. Jelöljük azután az SC és az O kör második metszéspontját D -vel; az SC és O_1A_1 metszéspontját pedig C_1 -gyel, akkor B_1 és C_1 rajta vannak természetesen az O_1 körön, mert hiszen S és T a két kör hasonlósági pontjai. Már most a BD és A_1C_1 illetőleg a DA és C_1B_1 egyenesek egymást olyan P , illetőleg R pontokban metszik, melyeknek az adott O és O_1 körökre egyenlő hatványaik vannak, vagyis a PR a két kör közös hatványvonala, mely az O kört a két kör metszéspontjaiban (X és Y) metszi.

¹J. Steiner szerkesztése.

²J. Steiner szerkesztése.



Bizonyítás: Az RD és RC_1 egyenesekre nézve SB_1 és SC_1 antiparallel egyenesek, tehát az ARB_1 és C_1RD háromszögek hasonlóak és így:

$$RA \cdot RD = RB_1 \cdot RC_1.$$

Hasonlóképpen a PC_1D és PBA_1 hasonló háromszögekből:

$$PD \cdot PB = PC_1 \cdot PA_1.$$

(b) A két O_1 és O_2 kör tetszőleges helyzetű, de O , O_1 és O_2 pontok nem esnek egyazon egyenesbe.

Megoldás. Megszerkesztjük az O és O_1 , illetve az O és O_2 körök hatványvonalait (p_1 és p_2) az előbbi módszer segítségével és jelöljük ezek metszéspontját H -val. Mivel 3 kör hatványvonalai egyazon H ponton mennek keresztül, azért az O_1 és O_2 körök hatványvonala a p_{12} a H -ból az O_1O_2 centrálisra merőlegesen (γ) bocsájtott egyenes lesz. Meglévén a hatványvonal, az O és O_2 körök metszéspontjait ezen p_{12} -nek bármelyik körrel való metszéspontjai adják.

(c) Az O , O_1 és O_2 középpontok egyazon egyenes pontjai.

Megoldás. Felveszünk egy tetszőleges sugarú harmadik kört, melynek azonban középpontja O_3 nem esik az OO_1O_3 egyenesbe.

Ha már most az O_1 és O_3 , illetve az O_2 és O_3 körök hatványvonalai egymást H' -ban metszik, akkor az O_1 és O_2 körök hatványvonala a H' -ből az O_1O_2 centrálisra bocsájtott merőleges lesz.

Összefoglalás. Látható tehát, hogy vonalzóval és a középpontjával együtt kirajzolt kör segítségével a kör síkjában minden alapfeladatot megoldhatunk, tehát e segédeszközökkel, csakúgy mint körzővel és vonalzóval, minden mértani szerkesztés elvégezhető.