I. Általános megjegyzések.

Leghasználatosabb rajzeszközeink a körző és a vonalzó; az ezekkel elvégezhető szerkesztéseket a görög mathematikusok után mértani szerkesztéseknek nevezzük.

A görög mathematikusok szeme előtt a szerkesztések keresztülvitelénél csak elméleti szempontok lebegtek: a lehető legegyszerűbbnek olyan szerkesztéseket tartottak, melyeknél a rajzeszközök alkalmazására a lehető legkevesebbszer volt szükség. Ám valamely elméletileg egyszerű szerkesztés kivitele sokszor igen fáradságos, sőt bizonyos rajzeszközök hiányában kivihetetlen is, miért is később olyan szerkesztéseket iparkodtak adni, amelyek kényelmesebben és a mi a fő: pontosabban végezhetők el; szóval az elméletileg egyszerűt feláldozták a gyakorlati érdekeknek.

Így pl. a vonalzóval végezhető szerkesztések a legkényelmesebbek és a legpontosabbak. Ha körzőt használunk, akkor egy távolság átvitele pontosabban eszközölhető, mint ugyanazon távolságnak végtelen sokszor való átvitele: a körív megvonása. Néha meg egyáltalán nem rajzolhatunk kört a körzővel, hanem (pl. két hegyes végével) csupán mérésre használhatjuk, mely esetben a körzőt *mérőnek* fogjuk nevezni. Ha a mérővel csak egyetlen egy meghatározott távolságot vihetünk át, akkor a mérőt *étalonnak* fogjuk nevezni.

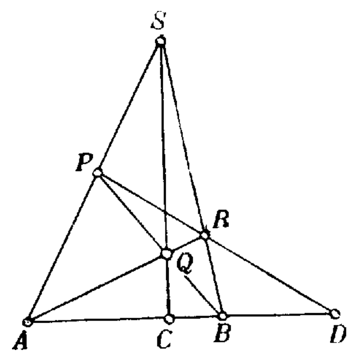
Lásunk olyan szerkesztést, mely pusztán vonalzóval is elvégezhető.

1. feladat. Adott egyenesen adott A, B, C pontokhoz (C az A és B között legyen) olyan D pontot szerkesszünk, mely a C-t harmonikusan választja el az A, B ú. n. alappontoktól; vagyis szerkesszük meg D-t úgy, hogy

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1$$

legyen.

Megoldás: *(a)* Az adott egyenesen kívül fekvő tetszőleges S pontot kössük össze az adott A, B, C pontokkal és vegyünk fel az SC-n egy ugyancsak tetszőleges Q pontot. Ha már most AQ, illetőleg BQ az SB, illetőleg SA egyeneseket az R, illetőleg a P pontban metszi, akkor PR az adott egyenest a keresett D-ben metszi.



Bizonyítás: Alkalmazzuk az SAB háromszögre a Ceva és Menelaos-féle tételeket, akkor:

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{BR}{SR} \cdot \frac{SP}{AP} = -1$$

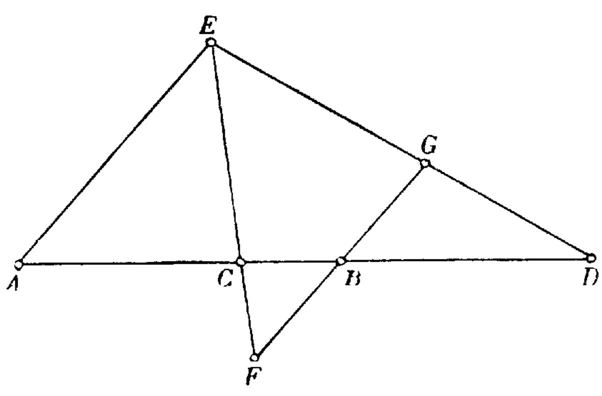
és

$$\frac{AC}{BD} \cdot \frac{BR}{SR} \cdot \frac{SP}{AP} = +1.$$

E két egyenlet osztásából pedig ered:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1$$

(b) Ugyanez a szerkesztés így is végezhető el: Az A és B pontokból húzott tetszőleges párhuzamosakat messe egy a C-n átmenő tetszőleges egyenes E-ben és F-ben. Mérjük azután BF meghosszabbítására a BG darabot, akkor EG az AB-t a keresett D-ben metszi.



Bizonyitás. A sugárrendszer törvényei alapján:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AE}{BF}$$

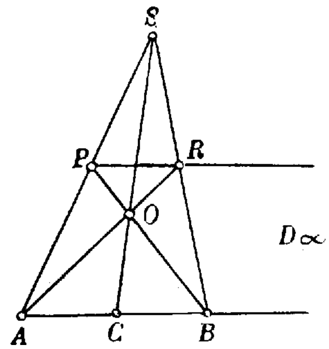
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BG};$$

tehát osztás után:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1.$$

Nem szorul magyarázatra, hogy az első szerkesztés mennyivel kényelmesebb és pontosabb, mint a második, bár az elsőnél 6, míg az utóbbinál csak 4 egyenes megvonására volt szükségünk.

1. tétel. Ha az egyazon egyenesen fekvő A, B, C pontok közül C az AB távolságot felezi, akkor a negyedik harmonikus pont (D) a végtelenbe esik.



Bizonyítás: Ha az SAB háromszögre a Ceva-tételt alkalmazzuk, akkor

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{BR}{SR} \cdot \frac{SP}{AP} = -1.$$

Ámde feltételünk értelmében

$$\frac{AC}{BC} = -1,$$

tehát

$$\frac{BR}{SR} \cdot \frac{SP}{AP} = +1,$$

vagyis:

$$\frac{SP}{PA} = \frac{SR}{RB},$$

amiből a sugárrendszer törvényei szerint:

$$PR \parallel AB.$$

Az itt kimutatott tétel megfordítása is érvényes.

2. tétel. Ha PR párhuzamos az AB-vel, akkor SC felezi az AB távolságot.

Bizonyítás: A sugárrendszer törvényei szerint:

$$\frac{SP}{PA} = \frac{SR}{RB}$$

vagy

$$\frac{BR}{SR} \cdot \frac{SP}{AP} = +1$$

és minthogy a Ceva-tétel értelmében

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{BR}{SR} \cdot \frac{SP}{AP} = -1,$$

azért e két utolsó egyenlet osztásából:

$$AC = CB.$$

E két tétel alapján pusztán vonalzóval megoldhatók e feladatok.

2. feladat. Adott egyenesen adott AC és CB egyenlő darabok vannak; húzzunk adott P ponton át az adott egyenessel párhuzamost.

Megoldás: Az AP-n vegyük fel S-et tetszés szerint és messe BP az SC-t Q-ban és AQ az SB-t R-ben, akkor (1. tétel):

$$PR \parallel AB.$$

3. feladat. Adva van a síkban két megrajzolt párhuzamos; felezzük az egyik párhuzamoson fekvő AB távolságot.

Megoldás: A másik párhuzamoson tetszésszerint kijelöljük a P és R pontokat. Messe egymást AR és BP Q-ban, az AP a BR-et pedig S-ben, akkor SQ az AB-t C-ben felezi (2. tétel).

Lambert francia geometer volt az első, aki olyan szerkesztésekkel foglalkozott, melyek pusztán vonalzóval is elvégezhetők és e szerkesztéseket a *"a vonalozó geometriájának"* (géometrie de la regle) nevezte.

Mascheroni[1] megmutatta, hogy az összes mértani szerkesztések csupán körzővel elvégezhetők.

Steiner a nagynevű német geometer kifejtette[2], hogy az összes mértani szerkesztések pusztán vonalzóval elvégezhetők, hacsak a síkban egy a középpontjával együtt megrajzolt kört megadunk.

Vonalzóval és mérővel megoldható szerkesztésekre először *Hilbert* göttingai tanár irányította a figyelmet[3]; *Kürschák József* budapesti műegyetemi tanár pedig megmutatta, hogy a mérő mindenkor helyettesíthető egy étalonnal.

Jelen cikkünkben ezen szerkesztések megismertetésével szándékozunk foglalkozni, szükséges azonban, hogy először néhány általános megjegyzést tegyünk.

Akármilyen összetett is legyen valamely mértani szerkesztés, (tehát körző és vonalzóval elvégezhető szerkesztés), mindig visszavezethető bizonyos legegyszerűbb alapszerkesztések ismételt alkalmazására.

Vonalzóval a következő szerkesztések egyikét végezhetjük el közvetlenül:

1°. egyenest húzunk;

2°. valamely megrajzolandó és egy már megrajzolt egyenesnek metszéspontját keressük;

3°. valamely megrajzolandó egyenes és egy már megrajzolt kör metszéspontjait keressük;

Körzővel közvetlenül csakis a következő szerkesztések egyikét végezhetjük el:

4°. körívet vonunk;

5°. adott távolságot adott egyenesre felviszünk;

6°. egy megrajzolandó kör és egy megrajzolt egyenes metszéspontjait keressük;

7°. egy megrajzolandó és egy megrajzolt kör metszéspontjait keressük.

Ha megengedjük a körző és vonalzó szabad használatát, akkor valamely geometriai kérdés megoldásának nehézsége csupán e hét alapszerkesztés alkalmas kombinálásából fakad. Ha azonban rajzeszközeink bizonyos megszorításoknak vannak alávetve, akkor mindig ki kell keresnünk e hét alapfeladatból azokat, melyek velök megoldhatók és általában valamely feladat akkor oldható meg bizonyos rajzeszközökkel, ha visszavezethető a feladat olyan alapszerkesztésekre, melyek azokkal a rajzeszközökkel megoldhatók.

Ha a vonalzót és körzőt nem használhatjuk szabadon akkor lehetnek olyan alapszerkesztések, melyek (a) direkt elvégezhetők, (b) a direkt elvégezhetőkre visszavezethetők és (c) egyáltalán el nem végezhetők.

A visszavezetésnél (b) néhány segédszerkesztés elvégzésére van szükségünk, mint pl.:

(α) párhuzamost vonjunk;

(β) valamely távolságot sokszorozzunk, vagy azt tetszésszerinti számú egyenlő részre osszuk;

(γ) egymásra merőleges egyeneseket húzzunk:

(δ) három adott távolsághoz a negyedik arányost szerkesszük.

Megjegyezzük még azt is, hogy az 1. és 4. feladatokat korlátolt segédeszközök mellett megoldottaknak tekintjük, ha tetszésszerinti számú pontját megtudjuk az egyenesnek vagy körívnek szerkeszteni.

[1] L. Mascheroni: La geometria del compasso.

[2]* J. Steiner: Die geom. Construktionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises. 1833.

[3] Hilbert: Grundlagen der Geometrie.