I. megoldás. A p-t tartalmazó tagokat különválasztva (1) bal oldala szorzattá alakítható:

$$(x^2-1)+p(x+1)=(x+1)(x-1+p).$$

Eszerint a gyökök: $x_1=-1$, $x_2=1-p$. Az x_1 behelyettesítésével (2) így alakítható át:

$$x_2^2(1+x_2)=0. \tag{3}$$

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha vagy

$$\begin{aligned} x_2=0, &\quad \text{azaz}\quad 1-p=0\text{-ból}\quad p=1,\quad \text{vagy}\\ 1+x_2=0, &\quad \text{azaz}\quad 2-p=0,\qquad p=2. \end{aligned}$$

Kunszenti Tamás (Budapest, Petőfi S. g. IV. o. t.)

II. megoldás. A gyökök felírása nélkül is célhoz érünk a gyökök és az együtthatók közötti összefüggések felhasználásával. (2)-t 0-ra redukálva

$$(x_1^2+x_2^2)+(x_1^3+x_2^3)=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=0.$$

Ide az (1)-ből adódó $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=p-1$ kifejezéseket behelyettesítve egyenletet kapunk p-re:

$$p^2-2(p-1)-p^3+3p(p-1)=-p^3+4p^2-5p+2=0. \tag{4}$$

Észrevéve, hogy az együtthatók összege 0, látjuk, hogy (4) egyik gyöke $p=1$, tehát a bal oldalon $p-1$ kiemelhető:

$$(p-1)(-p^2+3p-2)=0. \tag{5}$$

És mivel a második zárójelben levő polinom 0-helyei 1 és 2, azért egyenletünk

$$-(p-1)^2(p-2)=0,$$

ami $p=1$ és $p=2$-re teljesül.

Verdes Miklós (Pannonhalma, Bencés g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. (3)-ból látható, hogy a meghatározott p értékekkel – és csak ezekkel – minden pozitív egész n-re teljesül az általánosabb

$$x_1^n+x_1^{n+1}=-(x_2^n+x_2^{n+1})$$

követelmény.

Surányi Andor (Budapest, Madách I. g. IV. o. t.)

2. (4)-ből (5)-öt a $p^2-p^3=-p^2(p-1)$ kiemeléssel is megkaphatjuk.