

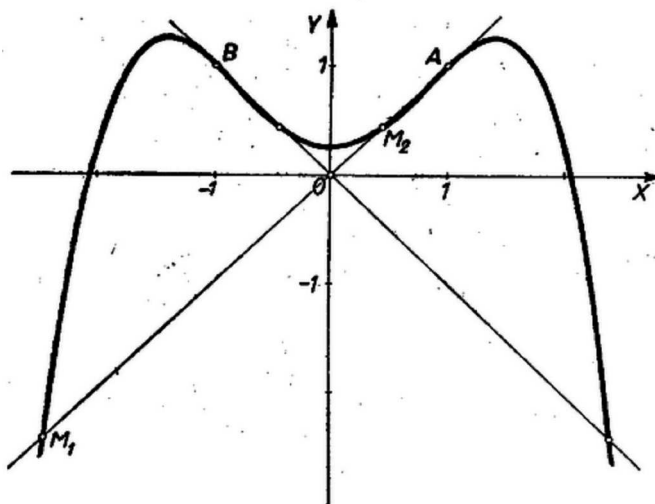
**Megoldás. I.** A keresett állandó pontokon a görbének az egyszerű számítást biztosító  $c = 0$  és  $c = 1$  értékek mellett is át kell mennie. Az így adódó

$$(1) \quad y = x^2, \quad y = x^4 + x^2 - 1$$

egyenletrendszerből  $y$  kiküszöbölésével

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0.$$

Innen – tekintve, hogy minden valós  $x$ -re  $x^2 + 1 \geq 1 > 0$  – adódik  $x^2 - 1 = 0$ , vagyis  $x = \pm 1$ , tehát (1)-ből mindkét esetre  $y = 1$ . Eszerint az állandó pontok csak  $A(1, 1)$  és  $B(-1, 1)$  lehetnek. Valóban az adott függvény értéke az  $x = \pm 1$  helyeken független  $c$  értékétől:  $y = c + 1 - c = 1$ , tehát az ábrázoló görbék minden  $c$  mellett átmennek  $A$ -n és  $B$ -n.



**II.** Az  $y = x^2$  parabola esetében az olyan egyeneseket tekintettük érintőknek, amelyeknek a parabolával való két közös pontjuk egybeesik, másképpen, amelyek egyenletét a paraboláéval összekapcsolva és az egyenletrendszerből  $y$ -t kiküszöbölve az  $x$ -re kapott másodfokú egyenletnek két egyenlő gyöke van. Így az egyenlet két gyöktényezője egyenlő.

Esetünkben az  $OA$  egyenes egyenlete  $y = x$ , így az  $y = x$ ,  $y = cx^4 + x^2 - c$  egyenletrendszerből adódó

$$cx^4 + x^2 - x - c = 0$$

egyenletnek az  $x = 1$  szám a fentiek szerint gyöke, tehát  $x - 1$  a bal oldalnak tényezője. Valóban

$$\begin{aligned} c(x^4 - 1) + (x^2 - x) &= c(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) + x(x - 1) = \\ &= (x - 1)[c(x + 1)(x^2 + 1) + x] = (x - 1)[cx^3 + cx^2 + (c + 1)x + c]. \end{aligned}$$

A további közös pontok abszcisszáit a

$$(2) \quad cx^3 + cx^2 + (c + 1)x + c = 0$$

egyenletből kapjuk. Az előírt  $A$ -beli érintés a parabola mintájára csak akkor következik be, ha az  $x = 1$ -szám gyöke (2)-nek. Kell tehát, hogy

$$c + c + (c + 1) + c = 4c + 1 = 0$$

teljesüljön, vagyis  $c = -1/4$ . Ekkor (2) így alakul:

$$-1/4(x^3 + x^2 - 3x + 1) = 0,$$

és a zárójelből az  $x - 1$  gyöktényező valóban kiemelhető:

$$\begin{aligned} (x^3 - 1) + (x^2 - 1) - 3(x - 1) &= (x - 1)(x^2 + x + 1 + x + 1 - 3) = \\ &= (x - 1)(x^2 + 2x - 1). \end{aligned}$$

Most már az  $x^2 + 2x - 1 = 0$  egyenletből a további két metszéspont abszcisszája  $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$ . Eszerint a metszéspontok:

$$M_1(-1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}), \quad M_2(-1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}).$$

Máté Eörs (Szeged, Radnóti M. g. III. o. t.)

*Megjegyzés.* A görbék közös pontjait a következő megfontolásból is megkaphatjuk. A függvény kifejezésének a szerint rendezett

$$y = c(x^4 - 1) + x^2$$

alakjából látjuk, hogy  $y$  csak azokra az  $x$ -ekre független  $c$ -től, amelyekre  $x^4 - 1 = 0$ .