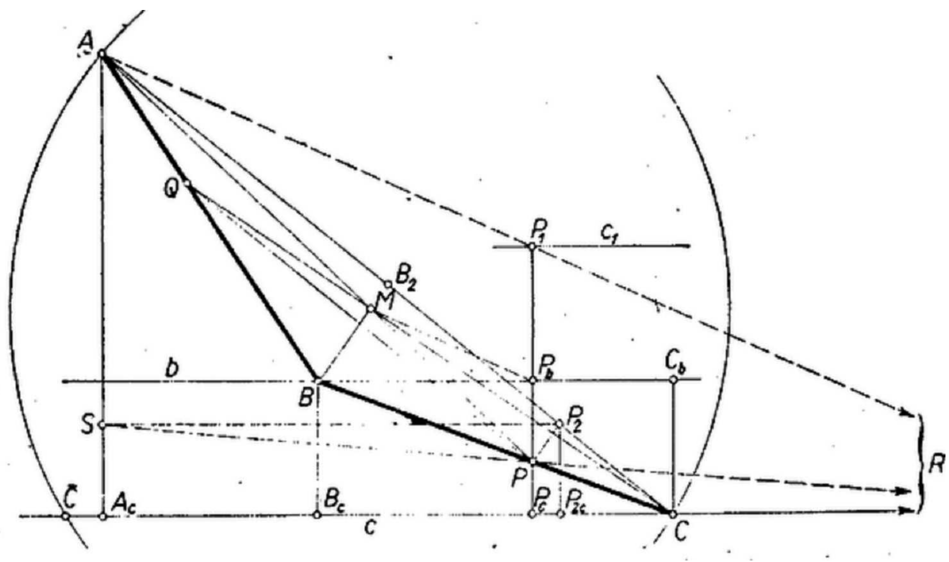
I. megoldás. A követelményeknek megfelelő útvonal esetén az ABC háromszög egyenlő szárú. Messe AB-t a P-n átmenő, AC-vel párhuzamos egyenes Q-ban, legyen az $ACPQ$ trapéz átlóinak metszéspontja M, továbbá P és C vetülete b-n P_b, ill. C_b. Ekkor az MPQ, MAC, a BPQ, BCA és a PBP_b, CBC_b nyilvánvalóan hasonló háromszög–párokból

$$\frac{MP}{MA}=\frac{PQ}{CA}=\frac{PB}{CB}=\frac{PP_b}{CC_b}.$$



Itt az utolsó arány ismert (mert CC_b a b és c egyenesek távolsága), ezért M a PA szakaszon megszerkeszthető[1](pl. a PAP_1 háromszög felhasználásával, ahol P_1 a P vetülete c-nek b-re vett c_1 tükörképén, így $P_bP_1=CC_b$ –, M-et a P_b-n átmenő AP_1-gyel párhuzamos egyenes metszi ki PA-ból). M ismeretében C-t c-ből az M körül írt MA sugarú körrel metszhetjük ki — mivel ABC háromszög egyenlő szárú, s így az $ACPQ$ trapéz szimmetrikus, tehát $MA=MC$ –, B-t pedig a CP egyenes b-vel való metszéspontja adja.

Megmutatjuk, hogy az ABC útvonal valóban megfelel a feltételnek. A CB szakaszon szerkesztés szerint rajta van P. Jelöljük az AC-vel P-n áthúzott párhuzamos és AB metszéspontját Q^*-gal. Ekkor az $ACPQ^*$ trapéz átlóinak metszéspontja pl. az AP átlót – amint föntebb láttuk – PP_b/CC_b arányban osztja, tehát egybeesik az M ponttal. Mivel szerkesztés szerint AMC egyenlő szárú háromszög, így PMQ^* is, amiből következik, hogy $ACPQ^*$ szimmetrikus trapéz, s így a szárak meghosszabbításának a metszéspontja is – ami a B pont – a szimmetriatengelyre esik. Ez azt jelenti, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú: $AB=BC$.

M egyértelműen szerkeszthető és mindig létezik. C-re 2, 1, vagy 0 megoldást kapunk. C-ből B szerkesztése ismét egyértelmű és B mindig létezik, mert a feladat szerint $PP_b<CC_b$.

Bellay Ágnes (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn. III. o. t.)

II. megoldás. Legyen (az eddigi jelöléseket megtartva) B és P vetülete c-re B_c, ill. P_c, AC-re B_2, ill. P_2, végül A és P_2 vetülete c-re A_c, ill. P_{2c}. Így P_2 az AP átmérőjű Thalész–körön van. Másrészt

$$\frac{P_2P_{2c}}{AA_c}=\frac{P_2C}{AC}=\frac{P_2C}{2B_2C}=\frac{PC}{2BC}=\frac{PP_c}{2BB_c}=\frac{PP_c}{P_1P_c},$$

eszerint megszerkeszthetjük P_2-nek c-től való távolságát, és ebből még egy mértani helyet kapunk P_2 számára. Így P_2, majd belőle C megszerkeszthető. (A fenti P_1A egyenesnek c-vel való metszéspontját R-rel jelölve PR-nek AA_c-n levő S metszéspontjára $SA_c=P_2P_{2c}$.)

A szerkesztés helyességének bizonyítását mellőzve csupán azt említjük, hogy a megoldások száma innen is 2, 1 vagy 0.

Máté Eörs (Szeged, Radnóti M. Gimn. III. o. t.)

Megjegyzés. A megoldók többsége B-t a P és A alappontokhoz és a $PP_b:CC_b$ arányhoz tartozó Apollóniusz–körrel metszette ki b-ből.
Ugyanis a fenti jelölésekkel

$$BP:BA=BP:BC=PP_b:CC_b.$$

5 dolgozat pedig bonyolult számítások alapján adott szerkesztést.

[1]Ehhez még az ABC háromszög egyenlő szárú voltát sem használtuk fel.