I. A 637. gyakorlat megoldása[1] során bebizonyítottuk; hogy

a) hegyesszögű háromszög talpponti háromszögének szögei rendre egyenlők az eredeti háromszög szögei pótszögének a 2-szeresével, valamint hogy

b) tompaszögű háromszög talpponti háromszögének két szöge 2-szer akkora, mint az eredeti háromszög megfelelő hegyesszöge, a harmadik pedig 180°-kal kisebb a tompaszög 2-szeresénél.

Láttuk továbbá, hogy derékszögű háromszögben a magasságtalppontok nem alkotnak háromszöget.

Feltéve, hogy a keresett H háromszög-alak hegyesszögű, betűzzük a szögeket úgy, hogy álljon $90^\circ > a \geqq \beta \geqq \gamma$. Ekkor a T talpponti háromszögnek *a)* alapján kifejezhető α', β', γ' szögeire:

$$\alpha' = 180^\circ - 2\alpha \leqq \beta' = 180^\circ - 2\beta \leqq \gamma' = 180^\circ - 2\gamma.$$

H és T hasonlósága nyilván csak úgy állhat fenn, ha a szögek nagyság szerinti rendben egyeznek meg. Ebből a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\alpha = 180^\circ - 2\gamma, \qquad \beta = 180^\circ - 2\beta, \qquad \gamma = 180^\circ - 2\alpha.$$

Innen $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, vagyis H valóban hegyesszögű, és a 637. gyakorlatban látott alaktól különböző.

Tegyük fel másodszor, hogy H tompaszögű, és benne

$$\alpha > 90^\circ > \beta \geq \gamma. \tag{1}$$

Így *b)* szerint T szögei:

$$\alpha' = 2\alpha - 180^\circ, \qquad \beta' = 2\beta, \qquad \gamma' = 2\gamma. \tag{2}$$

Itt $\gamma' \leqq \beta'$; másrészt hasonlóság esetén γ' nem lehet T legkisebb szöge, mert $\gamma' = \gamma$-ból $\gamma = 0^\circ$-ra jutnánk. Eszerint T legkisebb szöge α', vagyis

$$\alpha' < \gamma' < \beta'$$

(egyenlőség γ' és β' között sem állhat, mert β', mint a legnagyobb szög, tompaszög), tehát

$$\alpha' = 2\alpha - 180^\circ = \gamma, \qquad \gamma' = 2\gamma = \beta, \qquad \beta' = 2\beta = \alpha.$$

Innen $\alpha = 2\beta = 4\gamma$, másképpen $\alpha : \beta : \gamma = 4 : 2 : 1$, vagyis ez esetben H a 637. gyakorlatban vizsgált alak.

Más lehetőség a hasonlóságra nincs, ezzel az állítást bebizonyítottuk.

II. Keressünk olyan tompaszögű H-t, amelyre T_1 ugyancsak tompaszögű, nem hasonló H-hoz, és $T_2 \sim H$. Így H és T_1 szögeit ismét (1) és (2) adják, és γ' nem lehet tompaszög. Feltéve, hogy T_1 szögei közül α' a tompaszög, *b)* szerint T_2 szögei:

$$\alpha'' = 2\alpha' - 180^\circ = 4\alpha - 540^\circ, \qquad \beta'' = 2\beta' = 4\beta, \qquad \gamma'' = 2\gamma' = 4\gamma.$$

Itt a fenti második esethez hasonló meggondolással $\gamma'' \leq \beta''$, és γ'' nem a legkisebb szöge T_2-nek, ezért a legkisebb szög α''. Az előírt hasonlóság miatt

$$\begin{array}{lll} \alpha'' = \gamma, & \gamma'' = \beta & \beta'' = \alpha, \quad \text{azaz} \\ 4\alpha - 540^\circ = \gamma, & 4\gamma = \beta, & 4\beta = \alpha, \end{array}$$

tehát $\alpha : \beta : \gamma = 16 : 4 : 1$. Másképpen,

$$\frac{180^\circ}{16+4+1} = \frac{180^\circ}{21} = \varepsilon \ \text{ jelöléssel } \ \alpha = 16\varepsilon, \quad \beta = 4\varepsilon, \quad \gamma = \varepsilon.$$

Így valóban $\alpha > \beta + \gamma$, ezért T_1, szögei: $\alpha' = 2\alpha - 180^\circ = 32\varepsilon - 21\varepsilon = 11\varepsilon$, $\beta' = 2\beta = 8\varepsilon$, $\gamma' = 2\gamma = 2\varepsilon$, ezekre ismét $\alpha' > \beta' + \gamma'$, tehát $\alpha'' = 2\alpha' - 180^\circ = 22\varepsilon - 21\varepsilon = \varepsilon = \gamma$, $\beta'' = 2\beta' = 16\varepsilon = \alpha$ és $\gamma'' = 2\gamma' = 4\varepsilon = \beta$.

H és T_2 hasonlóságából következik, hogy talpponti háromszögeik: T_1, ill. T_3 ugyancsak hasonlók, tehát a T_1 alak (a szögek aránya $2 : 8 : 11$) ugyancsak megfelel a követelménynek. Ezzel az előírást teljesítettük.

Bornes Klára (Budapest, Teleki Blanka Gimn. IV. o. t.)

Megjegyzés. A II. rész követelményének megfelelő összes alakok (szögarányok) a következők:

$$H, T_2, T_4, \ldots \text{ hegyesszögű}, T_1, T_3, T_5, \ldots \text{ tompaszögű:} \quad \begin{array}{ll} 1:2:2; & 3:1:1; \\ 2:5:6; & 9:3:1; \\ 2:6:7; & 11:3:1; \end{array}$$

$$H, T_2, T_4, \ldots \text{ tompaszögű}, T_1, T_3, T_5, \ldots \text{ tompaszögű:} \quad \begin{array}{ll} 1:4:10; & 2:8:5; \\ 1:4:16; & 2:8:11. \end{array}$$

[1] K. M. L. 22 (1961/3) 110. o.