a) Jelentse β az (1) egyenlet egy gyökét, vagyis álljon fenn

$$g(\beta)=\beta^4+3\beta^3+4\beta^2+2\beta+1=0. \tag{3}$$

Eszerint a $-\beta$ számra teljesül

$$(-\beta)^4-3(-\beta)^3+4(-\beta)^2-2(-\beta)+1=0,$$

vagyis $-\beta$ gyöke az

$$x^4-3x^3+4x^2-2x+1=0 \tag{4}$$

ugyancsak negyedfokú egyenletnek, melyben a páratlan fokszámú tagok együtthatói az (1) megfelelő együtthatóinak (-1)-szeresei, a többi együtthatók pedig egyenlők (1) megfelelő együtthatóival. β az (1)-nek bármelyik gyökét jelentheti, ezért (4)-et az (1) mindegyik gyökének (-1)-szerese kielégíti. Más szám nem is tesz eleget (4)-nek, hiszen ha ennek egy gyöke γ, akkor $-\gamma$ gyöke a (4)-ből az iménti módosítással képezett egyenletnek, vagyis (1)-nek. Ezek szerint (4) éppen a keresett első egyenlet.

Ha (3) teljesül, akkor $\beta\neq 0$, hiszen $g(0)=1\neq 0$. Így mindegyik β gyök reciprokára fennáll

$$\frac{g(\beta)}{\beta^4}=1+3\frac{1}{\beta}+4\left(\frac{1}{\beta}\right)^2+2\left(\frac{1}{\beta}\right)^3+\left(\frac{1}{\beta}\right)^4=0,$$

tehát mindegyik gyök reciproka kielégíti a

$$g^*(x)=x^4-2x^3+4x^2-3x+1=0 \tag{5}$$

egyenletet, melynek együtthatói fordított sorrendben egyeznek (1) együtthatóival (a sorrend természetesen x fogyó hatványainak rendjében értendő). (5) valóban a keresett második egyenlet, mert gyökei csak az előírt számok, hiszen ha (5)-nek egy gyöke γ, akkor ugyanez a meggondolás mutatja, hogy $1/\gamma$ kielégíti (1)-et.

Mármost első meggondolásunkat (5)-re alkalmazva nyerjük, hogy a harmadik egyenlet:

$$\overline{g}^*(x)=x^4+2x^3+4x^2+3x+1=0. \tag{6}$$

b) Képezzük elsőnek a $g(x)\cdot\overline{g}(x)=G_1(x)$ szorzatot. $\overline{g}(x)$ egymás utáni tagjaival $g(x)$-et végigszorozva a részletszorzatok ugyancsak x fogyó hatványai szerint rendezett polinomok lesznek, és legmagasabb fokú tagjuk fokszáma lépésről lépésre 1-gyel kisebb lesz. Ezt tudva célszerű lesz a részletszorzatokat – a közönséges számok szorzásánál szokásos írásmódhoz hasonlóan – lépcsőzetesen úgy rendezni, hogy x ugyanazon kitevős hatványai egy–egy oszlopba jussanak. Így x hatványát minden oszlopban elég egyszer kiírni (pl. csak a felső tagban).

$$\begin{array}{rccccccccc}
 & \multicolumn{5}{l}{\underline{(x^4+3x^3+4x^2+2x+1)}\,(x^4-3x^3+4x^2-2x+1)} \\
 & x^8 & +3x^7 & +4x^6 & +2x^5 & +x^4 & & & & \\
 & & -3 & -9 & -12 & -6 & -3x^3 & & & \\
 & & & +4 & +12 & +16 & +8 & +4x^2 & & \\
 & & & & -2 & -6 & -8 & -4 & -2x & \\
 & & & & & +1 & +3 & +4 & +2 & +1 \\
\hline
G_1(x)= & x^8 & & -x^6 & & +6x^4 & & +4x^2 & & +1.
\end{array}$$

A páratlan kitevős hatványok kiesése várható volt. Hiszen (1) gyökeit β_1, β_2, β_3, β_4-gyel jelölve (4) gyökei $-\beta_1$, $-\beta_2$, $-\beta_3$, $-\beta_4$, így gyöktényezős alakban

$$\begin{aligned}G_1(x)=g(x)\cdot g(x)&=(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)(x-\beta_4)\cdot\\&\cdot(x+\beta_1)(x+\beta_2)(x+\beta_3)(x+\beta_4)=\\&=(x^2-\beta_1^2)(x^2-\beta_2^2)(x^2-\beta_3^2)(x^2-\beta_4^2),\end{aligned}$$

és ezt polinommá kifejtve x-nek csak páros kitevős hatványai léphetnek fel.

A fentebbiek alapján nyilvánvaló, hogy a $g^*(x)\cdot\overline{g}^*(x)=G_2(x)$ szorzatot $G_1(x)$-ből is megkaphatjuk, az együtthatókat fordított sorrendben véve, tehát

$$G_2(x)=x^8+4x^6+6x^4-x^2+1.$$

Ezekből (1) és a képezett három egyenlet bal oldalainak szorzata:

$$G_1(x)\cdot G_2(x)=x^{16}+3x^{14}+8x^{12}+21x^{10}+55x^8+21x^6+8x^4+3x^2+1,$$

és ez, amint várható volt, x^2-re nézve szimmetrikus polinom, hiszen minden gyökének (-1)-szerese, reciproka és reciprokának (-1)-szerese ugyancsak gyök, akárcsak (2)-ben (és minden gyök ugyanannyiszoros gyök), amint azt az 1113. feladatban láttuk.

Ezért – ha az állítás igaz – a meghatározandó további két egész együtthatós polinom szorzata ugyancsak x^2-re nézve szimmetrikus polinom lesz, fokszáma $20-16=4$, két szélső együtthatója 1, tehát

$$H(x)=x^4+Ax^2+1$$

alakú. Az A együttható meghatározása végett képezzük $G_1(x)\cdot G_2(x)$ és $H(x)$ szorzatát és kérdezzük, van-e olyan A, amelyre

$$G_1(x)\cdot G_2(x)\cdot H(x)\equiv f(x).$$

A szorzat a szimmetrikus tagoknak egy–egy zárójelbe való foglalásával

$$\begin{gathered}\left(x^{20}+1\right)+(3+A)\left(x^{18}+x^2\right)+(9+3A)\left(x^{16}+x^4\right)+(24+8A)\left(x^{14}+x^6\right)+\\+(63+21A)\left(x^{12}+x^8\right)+(42+55A)x^{10}.\end{gathered}$$

Az azonosság akkor és csak akkor áll fenn, ha valamennyi megfelelő együttható egyenlő:

$$3+A=9+3A=24+8A=63+21A=0 \quad \text{és} \quad 42+55A=-123.$$

Valamennyi feltételből $A=-3$ adódik, tehát

$$Hx=x^4-3x^2+1.$$

Mármost

$$\begin{aligned}H(x)&=\left(x^4+2x^2+1\right)-x^2=\left(x^2-1\right)^2-x^2=\\&=\left(x^2-1-x\right)\left(x^2-1+x\right),\end{aligned}\tag{7}$$

tehát valóban írható két egész együtthatós polinom szorzata gyanánt. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Zalay Miklós (Budapest, XVIII., Hengersor úti Gimn. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Többen $H(x)$-nek két tényezőre bontása céljára megoldották a $H(x)=0$ egyenletet:

$$\left(x^2\right)_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2},$$

és az irracionális gyökök láttán kimondták, hogy a kívánt felbontás lehetetlen, a feladat állítása téves.

Megmutatjuk, hogy kissé hosszabb úton ebből a kiindulásból is el lehet jutni a (7) eredményhez. Észrevéve, hogy

$$\left(x^2\right)_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2, \text{ és hasonlóan}$$

$$\left(x^2\right)_2=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2,$$

$H(x)$ gyökei a következők:

$$x_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\qquad x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\qquad x_3=\frac{\sqrt{5}+1}{2},\qquad x_4=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Ha a feladat állítása igaz, és a kérdéses két polinom másodfokú, akkor létezik ezeknek olyan két párba állítása, amelyben az összegek is és a szorzatok is egész számok. Ilyen az x_1, x_4, és x_2, x_3 párosítás:

$$x_1+x_4=-1,\qquad x_1x_4=-1;\qquad x_2+x_3=1,\qquad x_2x_3=-1.$$

Ezekkel

$$(x-x_1)(x-x_4)=x^2+x-1 \quad \text{és} \quad (x-x_2)(x-x_3)=x^2-x-1,$$

és így valóban

$$H(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=\left(x^2+x-1\right)\left(x^2-x-1\right).$$

2. Azt, hogy $G_1(x)$ nem tartalmazhatja x páratlan kitevős hatványát, a tényezők

$$g(x)=\left(x^4+4x^2+1\right)+x\left(3x^2+2\right)=K(x^2)+xL(x^2) \quad \text{és} \quad g(\overline{x})=K(x^2)-xL(x^2)$$

alakjából is beláthatjuk, ahol $K(x^2)$ és $L(x^2)$ az x^2 polinomjai. Így ugyanis a szorzat $G_1(x)=K^2(x^2)-x^2L^2(x^2)$, ami szintén x^2 polinomja.