I. megoldás. Az, hogy egy α szám gyöke (1)-nek, azt jelenti, hogy

$$f(\alpha)=\alpha^{20}-123\alpha^{10}+1=0. \tag{3}$$

Megmutatjuk, hogy a vizsgálandó számok különbözők. α-tól a $-\alpha$, $1/\alpha$ és $-1/\alpha$ számok mindegyike különböző, mert az $\alpha=-\alpha$ és $\alpha=1/\alpha$ feltevésből $\alpha=0$, ill. $\alpha=\pm1$ következik, márpedig e számok egyike sem gyöke (1)-nek, hiszen $f(0)=1$, és $f(\pm1)=-121$. Továbbá $\alpha\neq-1/\alpha$, mert ellentett előjelűek. Ezek szerint (-1-gyel szorozva) $-\alpha$-tól α, $-1/\alpha$ és $1/\alpha$ különbözők; végül $1/\alpha$ és $-1/\alpha$ ellentett előjelűek.

Mármost $-\alpha$ gyöke (1)-nek, mert $f(-\alpha)=f(\alpha)$, hiszen a bal oldalon x-nek csak páros kitevős hatványai szerepelnek. Szavakban: (1) minden gyökének (-1)-szerese ugyancsak gyök. Ezért $1/\alpha$ és $-1/\alpha$ közül elég egyikükről belátnunk, hogy kielégíti (1)-et. Az előbbire

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha^{20}}-\frac{123}{a^{10}}+1=\frac{1-123a^{10}+a^{20}}{a^{20}}=\frac{f(\alpha)}{a^{20}},$$

ami (3) szerint 0. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

b) Ha β gyöke (2)-nek, akkor egyrészt

$$g(\beta)=\beta^4+4\beta^2+1+\beta(3\beta^2+2)=0, \tag{4}$$

másrészt $\beta\neq0$, $+1$, -1, mert $g(0)=1$, $g(1)=11$, és $g(-1)=1$, továbbá a fentiekhez hasonlóan $-\beta$, $1/\beta$ és $-1/\beta$ különböznek β-tól. Megmutatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
g(-\beta)&=(\beta^4+4\beta^2+1)-\beta(3\beta^2+2),\\
g\left(\frac{1}{\beta}\right)&=\frac{1}{\beta^4}\big[(1+4\beta^2+\beta^4)+\beta(3+2\beta^2)\big]\quad\text{és}\\
g\left(-\frac{1}{\beta}\right)&=\frac{1}{\beta^4}\big[(1+4\beta^2+\beta^4)-\beta(3+2\beta^2)\big]
\end{aligned}$$

mindegyike 0-tól különböző. Az ellentétes esetben ugyanis állna

$$g(\beta)=g(-\beta),\quad\text{azaz}\quad g(\beta)-g(-\beta)=2\beta(3\beta^2+2)=0,$$

ami $\beta\neq0$ miatt csak $\beta^2=-2/3$, azaz $\beta=\pm\sqrt{-2/3}$ mellett teljesülhet. Tudjuk, hogy a valós számok körében ilyen β nincs, de ha egy bővebb számkörre térünk át, amelyben $\beta=\pm\sqrt{-2/3}$ létezik (a komplex számok köre ilyen), akkor is

$$g\left(\pm\sqrt{-\frac{2}{3}}\right)=\frac{4}{9}-\frac{8}{3}+1=-\frac{11}{9}\neq0.$$

Továbbá $g(1/\beta)=0$-val együtt fennállana

$$\beta^4g(1/\beta)=(1+4\beta^2+\beta^4)+\beta(3+2\beta^2)=0,$$

és ezt (4)-ből kivonva

$$g(\beta)-\beta^4g(1/\beta)=\beta(\beta^2-1)=\beta(\beta-1)(\beta+1)=0,$$

amiről fentebb láttuk, hogy lehetetlen. – Hasonlóan ha $g(-1/\beta)=0$, akkor egyszersmind

$$\beta^4g(-1/\beta)=(1+4\beta^2+\beta^4)-\beta(3+2\beta^2)=0,$$

és ezt (4)-ből kivonva

$$g(\beta)-\beta^4g(-1/\beta)=5\beta\big(\beta^2+1\big)=0,$$

ez pedig lehetetlen, mert $\beta^2\neq-1$, hiszen (ismét a komplex számok körében számolva) $\beta=\pm\sqrt{-1}$ mellett

$$g\big(\pm\sqrt{-1}\big)=1-4+1\mp\sqrt{-1}=-2\mp\sqrt{-1},$$

ami 0-tól különböző. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Németh István (Budapest, Bolyai J. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Többen az $1/\alpha$-ra, ill. $1/\beta$-ra vonatkozó állítás bizonyítása helyett arra hivatkoztak, hogy (1) ún. *szimmetrikus* (más elnevezéssel *reciprok*) egyenlet, (2) pedig nem szimmetrikus.

Az n-ed fokú

$$h(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0,\qquad(a_0\neq0)$$

algebrai egyenletet akkor nevezzük szimmetrikus egyenletnek, ha a bal oldalt a kitevők csökkenő sorrendjében rendezve az elölről és hátulról ugyanazon sorszámú együtthatók egyenlők, azaz

$$a_i = a_{n-i}, \quad \text{ahol} \quad \mathrm{i} = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, \mathrm{n}-1,\, \mathrm{n}.$$

Az $f(1/\alpha)$ helyettesítési érték fenti vizsgálatához hasonlóan általában is könnyen belátható, hogy szimmetrikus egyenlet *minden* gyökének reciproka is gyök. ($x=0$ nem gyök, mert $h(0)=a_n=a_0\neq 0$.)

Feladatunk *a)* részében valóban elég arra hivatkozni, hogy (1) az x^2 ismeretlenre reciprok egyenlet. A *b*) részben azonban nem elég (2) nem-szimmetrikus voltára utalni, mert ez a tény 2-nél magasabb fokszám esetén nem zárja ki, hogy némely gyökének reciproka is kielégítse a nem szimmetrikus egyenletet. Sőt az is lehetséges, hogy egy egyenlet minden gyökének reciproka ugyancsak gyök, és az egyenlet mégsem szimmetrikus, mert az ún. multiplicitási (többszörösségi) szám nem minden reciprok gyökpárra egyenlő. – (Az ilyesféle tévedések miatt a középiskolai anyagon túlmenő tételek felhasználásában megoldóinknak fokozott körültekintést ajánlunk.)

II. megoldás *az a) részre.* Bevezetve a $z=x^5$ új ismeretlent (1) valós gyökeit fel is írhatjuk. Az így adódó $z^4-123z^2+1=0$ egyenletből

$$z_{1,2}=\pm\sqrt{61{,}5+\sqrt{61{,}5^2-1}}, \qquad z_{3,4}=\pm\sqrt{61{,}5-\sqrt{61{,}5^2-1}},$$

mind a négy gyök valós. És mivel bármely valós z mellett az $x^5=z$ egyenletnek csak egy valós gyöke van, azért (1)-et csak a következő négy valós szám elégíti ki:

$$x_{1,2}=\pm\sqrt[10]{61{,}5+\sqrt{61{,}5^2-1}}, \qquad x_{3,4}=\pm\sqrt[10]{61{,}5-\sqrt{61{,}5^2-1}}.$$

Könnyű belátni, hogy ezek különbözők, és hogy köztük fennállanak a következő összefüggések:

$$x_1+x_2=x_3+x_4=0, \qquad x_1x_3=x_2x_4=1, \qquad x_1x_4=x_2x_3=-1.$$

Ezek szerint mindegyik (valós) gyök (-1)-szerese, reciproka és reciprokának (-1)-szerese ugyancsak gyök.

Katona Éva (Budapest, Ybl M. ép. ip. t. III. o. t.)