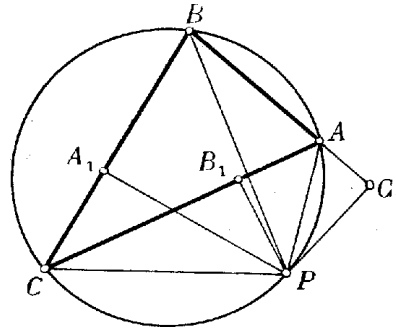


A *Mathematikai Gyakorlókönyv* II. kötetében ismertette van a Simson-féle egyenes háromféle bizonyítása (80. lap), ugyanott ismertette van a Menelaos-féle tétel is (83. lap).¹ Talán nem érdektelen, ha ezúttal megmutatjuk azt is, miképp lehet a Simson-féle egyenest a Menelaos féle tétel segítségével tárgyalni, mert hisz ez a tétel adja voltaképpen *általános* kritériumát annak, vajlon 3 pont egy egyenesbe esik-e?



A Simson-féle tétel azt mondja, hogy a háromszög köré írt kör tetszőszerinti P pontjából az oldalakra merőlegeseket bocsátva, ezeknek talppontjai (ábránkban A_1 , B_1 és C_1) egyenesbe esnek.

A Menelaos-féle tétel szerint pedig, arra nézve, hogy A_1 , B_1 és C_1 egy egyenesben fekszenek, szükséges és elegendő, hogy az oldalakon keletkezett szeletek között a következő összefüggés álljon fenn:

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1.$$

E kritériumot a jelen esetre a következőképpen alkalmazhatjuk:

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle PAC,$$

mert ugyanazon íven álló kerületi szögek. Tehát a PA_1B és PB_1A derékszögű háromszögek hasonlóak és innen

$$(1) \quad \frac{A_1B}{B_1A} = \frac{PB}{PA}.$$

Egész hasonlóan

$$\sphericalangle PCA = \sphericalangle PBA$$

és ezért

$$PB_1C \Delta \sim PC_1B \Delta,$$

ahonnan

$$(2) \quad \frac{B_1C}{C_1B} = \frac{PC}{PB}.$$

Végül pedig

$$\sphericalangle PAC_1 = \sphericalangle PCB,$$

mert az elsőnek kiegészítő szögéhez, PAB -hez tartozó ív az utóbbihoz tartozó ívet teljes körré egészíti ki. Tehát megint

$$PC_1A \Delta \sim PA_1C \Delta,$$

mert e háromszögek egyúttal derékszögűek is. Innen ismét:

$$(3) \quad \frac{C_1A}{A_1C} = \frac{PA}{PC}.$$

Az (1), (2), (3) alatti arányokat egymással megszorozva látjuk, hogy csakugyan

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{PB}{PA} \cdot \frac{PC}{PB} \cdot \frac{PA}{PC} = 1.$$

Megjegyezzük még, hogy az (1), (2), és (3) aránylatok közül az egyiknek mindig némileg másképp alakul a levezetése, mint a másik kettőé, mert mindig olyanok a viszonyok, hogy a P pont 3 vetülete közül kettő magukra az oldalakra esik, egy pedig a meghosszabbításra. Ha ugyanis 3 pont valamely háromszög oldalain egy egyenesbe esik, akkor csak 2 eset lehetséges: vagy kettő magukon az oldalakon van és egy a meghosszabbításán, vagy mind a három az oldalak meghosszabbításán. A háromszög köré írható kör pontjainak vetületeire nézve azonban az utóbbi ki van zárva.

¹L. még előbbit K. M. L. VI. évf. 117. lap, utóbbit IV. évf. 148. lap.