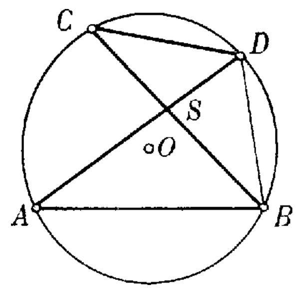
Annak a húrnégyszögnek, a melynek kerülete önmagát metszi, a következő módon határozhatjuk meg a területét.



Legyenek $AB = a,\ BC = b,\ CD = c,\ DA = d,$

$$BAD\sphericalangle = BCD\sphericalangle = \varphi.$$

A terület két összefüggő darabját, ha a körüljárás irányát figyelembe vesszük,[1] ellenkező jelekkel látjuk el, úgy hogy

$$T = ABS - DCS.$$

Adjuk hozzá és vegyük is el a BSD területet, akkor

$$T = ABD - BDC. \tag{1}$$

A két háromszög területe azonban így fejezhető ki:

$$ABD = \frac{1}{2}ad \cdot \sin\varphi, \qquad BDC = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\varphi,$$

úgy hogy

$$T = \frac{1}{2}(ad - bc) \cdot \sin\varphi. \tag{2}$$

A $\sin\varphi$-t kell $a,\ b,\ c,\ d$-vel kifejezni. Erre nézve, mint a rendes húrnégyszögnél BD-t kétszer fejezzük ki, az ABD, illetőleg a BDC háromszögekből s a két kifejezést egyenlítjük. Így lesz

$$a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\varphi = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\varphi,$$

ahonnan

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad - bc)}. \tag{3}$$

Innen a $\sin\varphi$ meghatározható, egészen úgy, a mint ezt a számítást a *Heron* képlet levezetésénél a kézi könyvek tanítják. Így azt kapjuk, hogy

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{4} \cdot \frac{[(a+d)^2 - (b+c)^2][(b-c)^2 - (a-d)^2]}{(ad - bc)^2}.$$

Ha itt tényezőkre bontunk, és

$$2s' = a + b - c + d$$

írjuk, ered

$$\sin^2\varphi = 4 \cdot \frac{(s'-a)(s'-b)(s'-c)(s'-d)}{(ad - bc)^2}. \tag{4}$$

Ha innen (2)-be helyettesítünk, ered végül:

$$T = \sqrt{(s'-a)(s'-b)(s'-c)(s'-d)}; \tag{5}$$

amely a közönséges húrnégyszög képletétől csak abban tér el, hogy egyik oldalt negatív jellel kell vennünk.[2]

[1] L. K. M. L. IX. évf. 126. lapon.

[2] V. ö. *Baltzer* Elemente der Mathematik II. 6. Aufl. 134., 135. l. és 308., 209. l.