Az Apolloniusról elnevezett föladat általános alakjában így hangzik: *Szerkesztendő olyan kör, mely három adott kört érint.*

Apollonius 200 évvel élt K. e. Ő az érintési föladatokat kúpszeletek segítségével oldotta meg.

Viéte francia mathematikus 1600-ban "Apollonius Gallus" című művében önállóan tárgyalta e föladatot. Viéte óta több kitűnő mathematikus foglalkozott e föladattal. Így többek között: Descartes, Newton, Lambert, Carnot, Gauss, Binet, Gergonne, Plücker, Poncelet, dr. Hunyadi Jenő stb.

A szerkesztéseknél minden lépten-nyomon egy-egy ily föladatra akadunk. Sok feladat végelemzésben ilyenre vezethető vissza.

Minthogy tankönyveink ezeket nem tárgyalják, a következőkben adjuk kimerítő tárgyalásukat.

A föladatnak általában nyolc megoldása lehet. Ez esetek föltüntetése végett oly köröket tekintünk csak, melyek egymást ne messék, ne érintsék és közülök egyik se feküdjék a másikban; mert e speciális esetekben a megoldások száma alábbszáll.

Az adott köröknek eme említett kölcsönös helyzeténél a keresett kör érintheti a három kört úgy, hogy

1. mind a hármat kizárja (kizárólag),
2. mind hármat körülfogja (bezárólag),
3. kettőt kizár, egyet körülfog,
4. egyet kizár, kettőt körülfog.

A 3. és 4. mindegyike három megoldást tartalmaz, eszerint nyolc megoldás lehetséges.

Ha az egyenest végtelen nagy, a pontot pedig végtelen kis sugárú körnek tekintjük, akkor ez a föladat tíz esetet foglal magában, melyek, ha a pontot P-vel, az egyenest e-vel és a kört O-val jelöljük a következők:

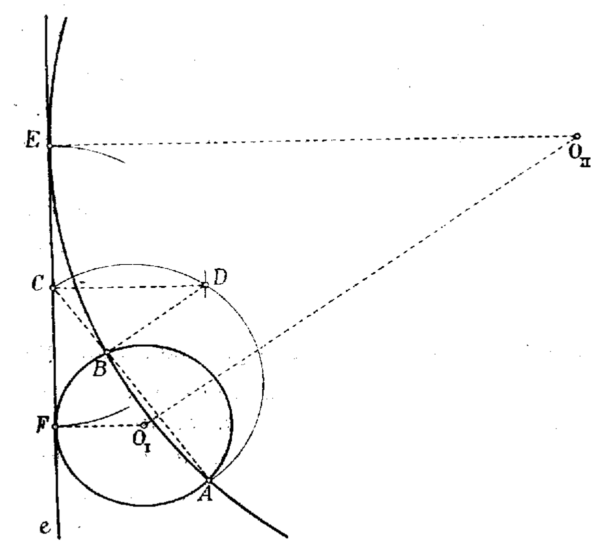
1. P, P, P; 2. P, P, e; 3. P, P, O; 4. P, e, e; 5. P, e, O; 6. P, O, O; 7. e, e, e; 8. e, e, O; 9. e, O, O; 10. O, O, O.

Ám, az első és hetedik esettel nem kell külön foglalkoznunk, mert azonosak evvel a két föladattal; egy háromszög köré, illetőleg oly kört szerkeszteni, mely egy háromszög oldalait érinti; az utóbbinak négy megoldása van. A fennmaradó nyolc eset két csoportba osztható aszerint, amint az adatok között legalább egy pont fordul elő vagy egy sem.

Lássuk az eseteket sorra.

I. Adva van két pont és egy egyenes. Keressük azt a kört, mely a pontokon átmenve az egyenest érinti.

Jelölje A és B az adott pontokat és e az adott egyenest. A keresett körnek húrja AB és e annak érintője. Legyen ezeknek közös pontja C és e egyenesen F az érintési pont. A C ponton áthaladó átszelő és érintő között a következő összefüggés érvényes: $CA \cdot CB = \overline{CF}^2$, azaz CF mértani középarányosa CA és CB szeleteknek.

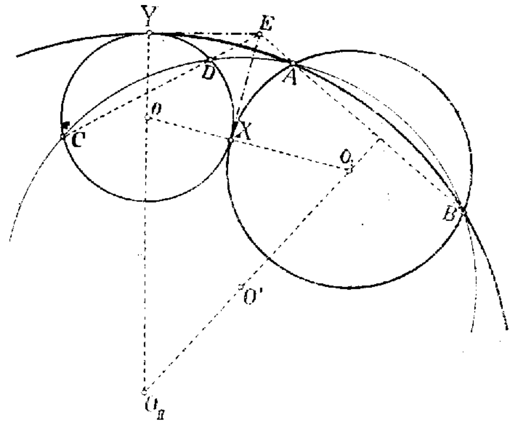


E középarányos szerkesztése végett AC fölé félkört és B-ben AC-re merőlegest rajzolunk; ezek D közös pontjának távolsága C-től a kívánt mértani középarányos. Ezt a közt C-től e-re mérjük E, illetőleg F-ig.

A keresett körök középpontjainak egyik mértani helye AB köznek szimmetrálisa, a másik pedig E-ben, illetőleg F-ben e-re állított merőleges.

II. Adva van két pont és egy kör. Keressük azt a kört, mely a pontokon átmegy és a kört érinti.

Legyenek az adott pontok A és B és a kör középpontja O. Vezessünk A és B pontokon át tetszőleges, az adottat C és D pontokban metsző kört és jelöljük CD és AB közös pontját E-vel.



Legyen az adott körön X az érintési pont; ekkor egyfelől:

$$EB \cdot EA = \overline{EX}^2,$$

másfelől:

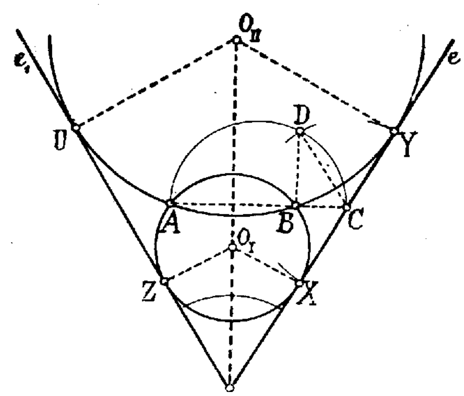
$$EC \cdot ED = \overline{EX}^2.$$

Ez utóbbi egyenlet értelmében az adott körhöz E-ből érintőket rajzolunk, melyek az első egyenlet szerint a keresett körnek is érintői, miáltal az X és Y érintési pontokat kapjuk

A körök középpontjai egyrészt AB köznek szimmetrálisán, másrészt az XO és YO egyeneseken feküsznek.

III. Adva van egy pont és két egyenes. Keressük ama kör középpontját, mely a ponton átmegy és az egyeneseket érinti.

Legyenek a megadott elemek A, e és e_1. A keresett kör középpontjának egyik mértani helye az $(e,\ e_1)$ szög szimmetrálisa; ezért ez a kör A-nak B szimmetriás pontpárján is át fog haladni.

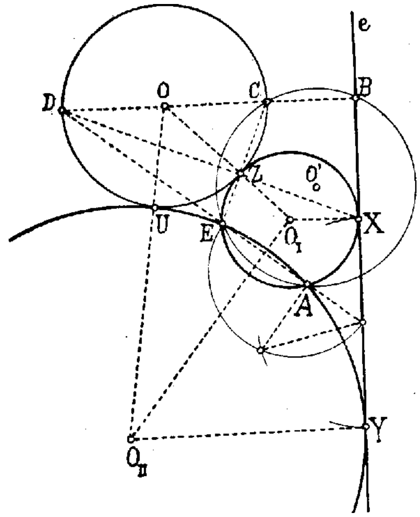


Ezzel e föladatot visszavezettük az I. esetre, melynél fogva oly kört kerestünk, mely A és B pontokon átmegy és az e vagy e_1 egyenest érinti.

IV. Adva van egy pont, egy egyenes és egy kör. Keressük ama kör középpontját, mely a ponton áthaladva az egyenest és a kört érinti.

Legyen A az adott pont, e az egyenes és O a kör középpontja.

Tekintsük a föladatot megoldottnak és jelölje O_1 a keresett kör középpontját



Emeljünk O-ból és O_1-ből merőlegeseket e-re; ezeknek talppontjai B és X. Az OD és O_1X párhuzamos sugarak végső pontjainak DX összekötő egyenese az adott és a keresett kör Z belső hasonlósági pontján halad át.

A BDX és CDZ derékszögű háromszögek hasonlóságából következik, hogy:

$$CD : DZ = DX : BD,$$

vagy:

$$DC \cdot DB = DX \cdot DZ.$$

A DA és DX átszelőkön támadt szeletekre nézve érvényes hogy:

$$DA \cdot DE = DX \cdot DZ;$$

e két egyenlet összehasonlítása adja, hogy

$$DC \cdot DB = DA \cdot DE,$$

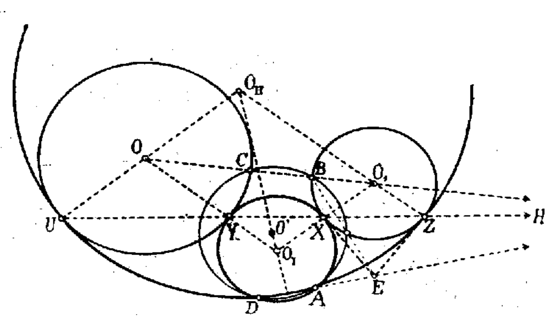
azaz: A, B, C pontok E ponttal együtt egy kör kerületén feküsznek, mely kör A, B és C pontok által meg van határozva, tehát O' középpontja megszerkeszthető. E körön AD egyenes az E pontot megállapítja.

Így ezt a föladatot is visszavezettük az I. esetre, mely szerint oly kör szerkesztendő, mely A és E pontokon átmenve e egyenest érinti. E köröknek középpontjai egyfelől az AE köz szimmetrálisában, másfelől az X és Y érintési pontokon át e-re állított merőlegesekben feküsznek. Ha végül e középpontokat összekötjük O-val, nyerjük az adott körön az U és Z érintési pontokat.

A föladatnak még két megoldása van. Ugyanis: előállítjuk ama segédkört, mely most A, B és D pontokon megy át és jelöljük középpontját O''-vel; ezt a kört AC egyenes messe E' pontban. Végül ama körök középpontjait keressük, melyek A és E' pontokon mennek át és e-t érintik. Ezek a körök az adottat körülfogva érintik.

V. Adva van egy pont és két kör, szerkesszük meg azt a kört, mely e ponton átmegy és a köröket érinti.

Jelölje A az adott pontot, O és O_1 a körök középpontjait. Legyen O_I a keresett kör középpontja és X, Y az érintési pontok. E pontok összekötő egyenese az adott köröket U, Z pontokban és a centrálisukat H pontban metszi.



$$OYU\sphericalangle = XYO_1\sphericalangle = O_1XY\sphericalangle = O_1XZ\sphericalangle = O_1ZX\sphericalangle;$$

ebből következik, hogy $OY \parallel O_1Z$ és hogy H az adott körök külső hasonlósági pontja.

Ennélfogva:

$$HX \cdot HY = HB \cdot HC;$$

másfelől:

$$HX \cdot HY = HA \cdot HD;$$

e szerint:

$$HB \cdot HC = HA \cdot HD;$$

Ez az utolsó egyenlet azt mondja, hogy az A, B, C és D pontok egyugyanazon körön feküsznek, mely kört az A, B és C pontok már megállapítják; középpontja O' és rajta a D pont is ismeretessé válik az AH egyenes segítségével.

A föladat ezek után a II. esetre vezetett, mely szerint az a kör keresendő, mely átmegy az A és D pontokon és az adott körök valamelyikét érinti. Az ott megállapított szerkesztés folytán oly segédkör szükséges, mely az A és D pontokon áthaladva pl. O_1 középpontú kört messe. Ez a kör a jelen esetben a már fölhasznált O' középpontú kör lehet. Az ennek segítségével nyert E pontból O_1 körhöz rajzolt érintők az X és Z érintési pontokra vezetnek.

A keresett körök O_I és O_{II} középpontjainak egyik mértani helye az AD köz szimmetrálisa, a másik az O_1X és O_1Z, illetőleg OU és OY egyenesek. (Az egyik kör az adottakat kizárólag, a másik bezárólag érinti.)

Ha ugyanezt a szerkesztést az adott körök belső hasonlósági pontjának figyelembevételével ismételjük, még két, a föltételeket kielégítő, kört nyerünk, melyek az adottak egyikét kizárólag, másikát körülfogva érintik.

A föladatnak ezek szerint négy megoldása van.