A háromszög szögeinek az oldalakból való meghatározása rendesen a *cosinus*-tétel segítségével történik. A levezetéssel járó algebrai számítások, bár tanulságosak, de elég hosszasak. A következő sorokban olyan levezetést mutatok be, a melynél a cosinus-tételt kikerüljük, s az algebrai számítás is megrövidül.[1]

1. Az ABC háromszögben a belülírt kör középpontját jelölje O, érintéspontjait az oldalakon $E,\ F,\ G$, úgy hogy sugara

$$r = OE = OF = OG.$$

Ha az oldalok félösszegét s-sel jelöljük, akkor

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c} \tag{1}$$

Ezekben a képletekben csak r-et kell még az oldalakkal kifejezni. Keresünk tehát egyenletet r és $a,\ b,\ c$ között. Ilyet kapunk, annak tekintetbe vételével, hogy

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} \tag{2}$$

Ez egyenlőségek elseje és utolsójába (1)-ből a félszögek tangenseinek értékeit beírva, és tekintetbe véve, hogy

$$2s-a-b=c,$$

ered

$$\frac{r}{s-c} = \frac{(s-a)(s-b)-r^2}{r\cdot c}.$$

Ezt az egyenletet rendezve és r-re nézve megoldva:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)-(s-c)}{s}}. \tag{3}$$

Tehát, (1)-be helyettesítve r-nek kifejezését, ered:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}, \tag{4}$$

2. A $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ stb. meghatározása a következő egyszerű módon történik.

Az ABC háromszög területét T-vel jelölve, egyfelől:

$$T = r\cdot s$$

(ahová r értékét (3)-ból beírva a *Heron* képletét nyerjük), másfelől

$$T = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = bc\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Ez utolsó két egyenletből $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$ kifejezhető az oldalakkal. Ezekből $\sin\frac{\alpha}{2}$ és $\cos\frac{\alpha}{2}$ jól ismert képletei szorzás- és osztással nyerhetők.

3. Ha a külső érintő köröket is tekintetbe vesszük, még más számításokat is rövid úton végezhetünk, a (2) összefüggés alapján. Meghatározhatjuk, az előbbihez egészen hasonló számítással $r_1,\ r_2,\ r_3$-at; bebizonyíthatjuk olyan összefüggések helyes voltát, ahol az $r_1,\ r_2,\ r_3$ mennyiségek az oldalakkal együtt szerepelnek.

Mint ilyen úton bebizonyítandókat említem a következőket:

1370.

$$r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = s^2 \text{[2]}$$

$$(s-b)(s-c)r_1 + (s-c)(s-a)r_2 + (s-a)(s-b)r_3 = r_1r_2r_3.$$

---

[1] Hasonló, de más útat jelölnek ki pl.: *Schuster:* Geom. Aufgaben. II. Trigonometrie. 26. l. *Reich:* Sammlung von Aufgaben I. 97. l. (3. Aufl.)

[2] L.K.M.L.VI. évf. 52. l. és *Rátz L.* Math. Gyakorlókönyv II. köt. 67. l. 502. feladat.