A geometria kézikönyvei a háromszög területének (T) képletei között felsorolják a következőt is:

$$T = \sqrt{rr_1r_2r_3}.$$[1]

Azonban csak úgy szokták említeni, mint érdekes *numerikus* összefüggést a terület és a háromszög négy érintő körének sugarai között.

Talán nem felesleges az a megjegyzés, hogy ennek a képletnek *geometriai* értelmezés is adható, úgy hogy a levezetése is nagyobbára geometriai úton végezhető.

Ebben a közleményben ugyanis bebizonyítom a következő *tételt:*

Minden háromszöghöz szerkeszthető olyan négyszög:

1. *amelynek csúcsai a körülírt körre esnek és területe a háromszög területével egyenlő;*
2. *a négyszögnek a', b', c', d' oldalaiból alakított*

$$s'-a',\ s'-b',\ s'-c',\ s'-d'$$

különbségek ($2s'=a'+b'+c'+d'$) *sorra nem egyebek, mint az érintő körök sugarai:*

$$r,\ r_1,\ r_2,\ r_3.$$

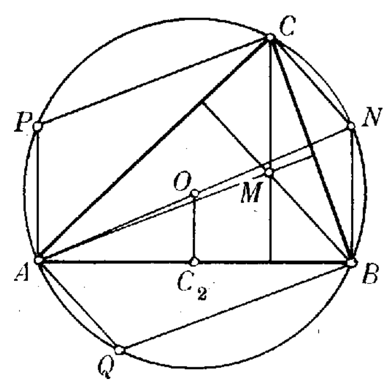
Ennek a tételnek közvetlen következménye, hogy a négyszög területét az oldalakkal kifejezve, az elül említett képletet kapjuk. Tehát joggal mondhatjuk, hogy ez a tétel a mondott képletnek geometriai tartalmát adja meg.

A bebizonyításhoz szükséges segédtételeket előre bocsátom.

1. *A magassági pontnak a háromszög valamelyik csúcsától való távolsága kétszer akkora, mint a körülírt kör középpontjának távolsága a csúccsal szemben fekvő oldaltól.*

Ha az AB oldal felező pontja C_2, körülírt kör középpontja O és a magassági pont M, azt kell megmutatni, hogy

$$CM = 2\cdot OC_2.$$



E végből vonjuk (1. rajz)

$$BN \parallel CM,\ CN \parallel BM.$$

A $CMBN$ parallelogrammában:

$$BN = CM. \tag{1}$$

Minthogy továbbá $BNC\sphericalangle = CMB\sphericalangle = 180^\circ - A\sphericalangle$, N pontja a körülírt körnek, de mivel még $NB \perp AB$, AN átmérő ($=2R$), tehát az O ponton átmegy. Ezért

$$AOC_2\Delta \sim ANB\Delta,$$

s a hasonlóság arányszáma $1:2$; a honnan következik, hogy

$$NB = 2\cdot OC_2,$$

vagy (1)-re való tekintettel

$$CM = 2\cdot OC_2. \tag{2'}$$

Jelöljük rövidség kedvéért, a magassági pont távolságát az A, B, C csúcsoktól m_1', m_2', m_3'-vel, a körülírt kör középpontjának távolságát a szembenfekvő oldalaktól x_1, x_2, x_3-mal, akkor még írhatjuk:

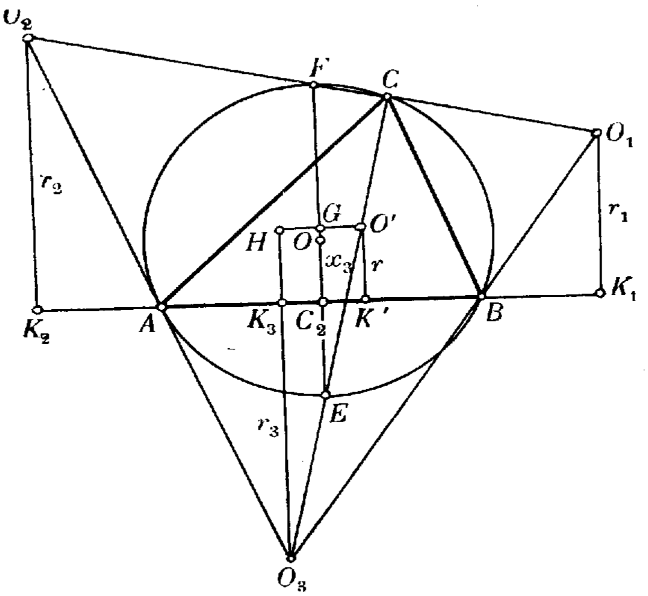
$$m_1' = 2x_1,\ m_2' = 2x_2,\ m_3' = 2x_3. \tag{2}$$

Az előbbi bizonyítás hegyesszögű háromszögre vonatkozik, de tompaszögűre is változatlanul átvihető.

[1] Rátz L. Math. Gyakorlókönyv 11. k. 67. l. 502. feladat.

2. *Az x_1, x_2, x_3 távolságok kifejezhetők a négy érintő kör sugaraival, r, r_1, r_2, r_3- mal.*

Ez összefüggések geometriai levezetésére vonjuk meg az ABC háromszögben (2. rajz) pl. a C szög belső és külső szögfelezőit, melyek a körülírt kört E-ben és F-ben messék.



Legyenek az érintő körök középpontjai O', O_1, O_2, O_3; vetületeik az AB oldalon sorra K', K_1, K_2, K_3, a körülírt kör középpontja O, az AB oldal felezőpontja C_1.

Úgy, hogy $CE \perp CF$ lévén, EF a körülírt kör átmérője: O-n keresztül megy; azonkívül a miatt, hogy AF ív $= FB$ ív: $EF \perp AB$, tehát C_2 is rajta van. Következőleg:

$$EF \parallel O'K' \parallel O_1K_1 \parallel O_2K_2 \parallel O_3K_3.$$

Mindenekelőtt a C_2E távolságot fejezzük ki, mert

(3) $$C_2E = R - x_3$$

lévén, ezzel x_3-ra is nyertünk kifejezést. (Tompaszögű háromszögnél ($C\sphericalangle > 90°$) x_3-at negatív jellel kell venni.) Fontoljuk meg erre nézve, hogy

$$AK_3 = BK',$$ [2]

tehát még:

$$C_2K_3 = C_2K',$$

amiből következik, $C_2E \parallel O'K' \parallel O_3K_3$ lévén, hogy

(4) $$EO_3 = EO'.$$

O'-ból vonjuk $O'H \parallel AB$, amely egyenes EF-et G-ben találja. Minthogy $GO'E\Delta \sim HO'O_3\Delta$, a (4)-re való tekintettel

(5) $$GE : HO_3 = 1 : 2.$$

De a rajzból láthatólag:

$$GE = GC_2 + C_2E = r + C_2E,$$

$$HO_3 = HK_3 + K_3O_3 = r + r_3,$$

amely értékeket (5)-be helyettesítve és C_2E-t meghatározva, ered:

(6) $$C_2E = \frac{1}{2}(r_3 - r).$$

Ezt az egyenlőséget (3)-mal egybevetve kapjuk:

(7') $$x_3 = R - \frac{1}{2}(r_3 - r).$$

[2] Rátz L. Math. Gyakorlókönyv II. k. 67. l. 498. feladat.

Az utolsó kifejezést még átalakítjuk, annak tekintetbe vételével, hogy

$$r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R \tag{8}$$[3]

Innen ugyanis

$$R = \frac{1}{4}r_1 + r_2 + r_3 - r),$$

amit (7′)-be téve, lesz:

$$x_3 = \frac{1}{4}(-r_1 + r_2 + r_3 + r). \tag{7}$$

Egészen hasonló két kifejezést kaphatunk x_1 és x_2-re.

Következmény. A (2) egyenletek alapján még ezeket nyerjük:

$$m_1' = \frac{1}{2}(-r_1 + r_2 + r_3 + r),$$

$$m_2' = \frac{1}{2}(r_1 - r_2 + r_3 + r), \tag{9}$$

$$m_3' = \frac{1}{2}(r_1 + r_2 - r_3 + r).$$

Megjegyzés. 1. A (8) egyenlőséget újólag bebizonyíthatjuk, csak C_2F-et kell kifejeznünk. A megelőzőhöz egészen hasonló meggondolásokból következik, hogy

$$C_2F = \frac{1}{2}(r_1 + r_2). \tag{10}$$

Minthogy pedig

$$C_2F + C_2E = 2R,$$

a (6) és (10) egyenletek összeadása a (8) összefüggést igazolja.

2. A (9) kifejezések tompaszögű háromszögnél annyiban változnak, hogy a tompaszög csúcsán átmenő magasságdarabot negatív jellel kell venni.

3. *A háromszög csúcsaiból a rajtuk át nem menő két magassági vonalhoz vont párhuzamosak a körülírt körbe írt hatszöget határolnák, melynek területe egyenlő a háromszög területének kétszeresével.*

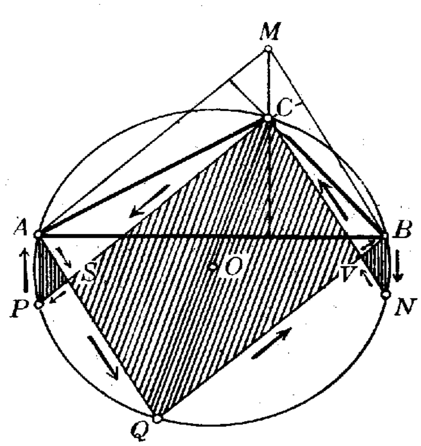
A hatszög legyen $AQBNCP$, ahol

$$AQ \parallel BM \parallel CN$$

stb. és azonkívül:

$$AQ = CN = m_2', \qquad AP = BN = m_3', \qquad BQ = CP = m_1'.$$

(a) Hegyesszögű háromszögnél az (1) pontban mondottak a bizonyítást megadják, ha megjegyezzük, hogy pl. $BNC\Delta \cong CMB\Delta$ (1. rajz).



(b) Tompaszögű háromszög esetében a hatszög kerülete önmagát metszi. Ezért ezt az esetet részletesebben kell tárgyalnunk. Mindenekelőtt értelmeznünk kell ilyen esetre a területet. Ennek módjáról már e lapokban volt szó.[4]

[3] L. Math. Gyakorlókönyv II. 68. l. 508. feladat.

[4] Lásd « Megjegyzések a talpponti háromszögről» c. közleményben K.M.L. IX. évf. 126. lapon; v.ö. *Baltzer:* Elemente der Mathematik III. k. 6. kiadás, 67–69. lap.

Ebben az esetben a kerület önmagát az S és V pontokban metszi (3. rajz). A hatszög területe most a $CSQV$ parallelogrammából és az APS, BVN háromszögekből áll. Ha a kerületet az $AQBNCPA$ rendben végig járjuk, a parallelogramma kerülete pozitív, a két háromszögé negatív körüljárású lesz, ezért a területet (T) az idézett helyen mondottak szerint így kell értelmeznünk:

$$\overline{T} = CSQV - APS - BVN.$$

Az oldalok párhuzamos volta miatt, és mert $AP = BN$

$$APS\Delta \cong BVN\Delta,$$

tehát

$$\overline{T} = CSQV - 2APS. \tag{11}$$

Másfelől vegyük tekintetbe, hogy a háromszög T területe igy fejezhető ki:

$$T = ABC = ABM - CBM - ACM.$$

vagy egybevágó háromszögekkel helyettesítve:

$$T = AQB - APC - BCN.$$

Eszerint írhatjuk:

$$2T = ABC + AQB - APC - BCN. \tag{12}$$

Azonban (a 3. rajzon láthatólag):

$$ABC + AQC = CSQV + ASC + BCV,$$

$$APC = APS + ASC,$$

$$BCN = BVN + BCV,$$

úgy hogy (12)-be helyettesítve ezt kapjuk:

$$2T = CSQV - APS - BVN. \tag{13}$$

A (11) és (13) egybevetéséből ered végül

$$\overline{T} = 2T. \tag{14}$$

A hatszög minden esetben szimmetrikus, 3 pár csúcsának összekötő egyenesei $(AN,\ BP,\ CQ)$ átmérők, s mindenik felezi az idomot.

Tompaszögű háromszög esetében csak a tompaszög csúcsából kiinduló átmérő (itt : CQ) halad a hatszög belsején át. CQ egyszersmind átlója a $CSQV$ parallelogrammának.

4. A megelőző pontban mondottakból következik, hogy

Mindig találhatunk olyan átmérőt, mely a hatszöget két egyenlő területű húrnégyszögre osztja. Ha $C\sphericalangle$ a háromszög legnagyobb szögét jelöli, akkor mindenesetre:

$$AQCPA = T. \tag{15}$$

Evvel az elül jelzett tételnek első felét bebizonyítottuk.

5. A tétel második felének bebizonyítására térünk át. Legyen először ABC hegyesszögű háromszög. Meghatározzuk az $AQCPA$ négyszög területét az oldalaiból.

Legyen

$$QC = a',\ CP = b',\ PA = d',\ AQ = c',$$

akkor (lásd 1. pont)

$$a' = 2R,\ b' = m_1',\ c' = m_3',\ d' = m_2'.$$

Vegyük tekintetbe a (8) és (9) összefüggéseket, akkor lesz:

$$s' = \frac{1}{2}(a' + b' + c' + d') = \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + r_3 + 4R)$$

$$= \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + r_3 - r + 4R + 4r),$$

vagy

$$s' = 2R + r, \tag{16}$$

továbbá

$$s' - a' = r,$$

$$s' - b' = 2R + r - \frac{1}{2}(-r_1 + r_2 + r_3 + r)$$

$$= 2R + \frac{1}{2}(r + r_1 - r_2 - r_3).$$

$2R$-et (8)-ból kifejezve, összevonás után

$$s' - b' = r_1,$$

és hasonlóan:

$$s' - c' = r_2, \tag{16'}$$

$$s' - d' = r_3.$$

Innen, a húrnégyszög területének ismert képletébe:

$$AQCPA = \sqrt{(s' - a')(s' - b')(s' - c')(s' - d')}$$

helyettesítve, (15)-re való tekintettel, ered:

$$T = \sqrt{r r_1 r_2 r_3}. \tag{17}$$

Tompaszögű háromszög esetében a négyszög területének képlete annyiban módosul, hogy c'-t mindenütt negatív jellel kell venni.[5]

A számítás maga, s így a (17) végső képlet nem szenved változást.

A $3-5$. pontokban a (17) képletnek geometriai levezetése foglaltatik.

[5] L. K.M.L. XII. évf. 78. lapon.