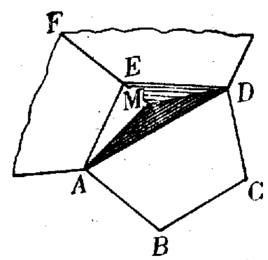
A következő sorokban a dodekaéder lapjainak hajlásszögét a gömbháromszögtan képletei nélkül határozzuk meg.

Legyen $ABCDE$ a dodekaéder egyik oldallapja. Az EF élét hosszabbítsuk meg s A és D-ből bocsássunk reá merőlegeseket.



Ezek talppontja ugyanazon M pontba esik, mert

$$AE = ED, \qquad EAM\sphericalangle = EDM\sphericalangle,$$

tehát

$$AME\sphericalangle \cong DME\Delta.$$

A hajlásszög, (amelyet $2v$-vel jelölünk) nem más mint $AMD\sphericalangle$.

Az AMD háromszögben $AM = MD$, $2v$ a csúcsnál levő szög, tehát

(1) $$\sin v = \frac{1}{2}\frac{AD}{AM}.$$

Az AD és AM hosszak egyszerűen kifejezhetők. Az AED háromszögből:

$$DAE\sphericalangle = 36^\circ,$$

(2) $$AD = 2 \cdot AE \cdot \cos 36^\circ,$$

továbbá az AEM háromszögből: $AEM\sphericalangle = 72^\circ$,

(3) $$AM = AE \cdot \sin 72^\circ = 2AE \cdot \sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ.$$

A (2) és (3)-at (1)-be írva, ered :

(4) $$\sin v = \frac{1}{2\sin 36^\circ}$$

mint ismeretes

$$\sin 36^\circ = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

Ezt helyettesítve és racionálissá téve, végre lesz:

(5) $$\sin v = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}.$$

Ennek a segélyével könnyen levezethető a belül és körül írt gömb sugarának képlete, valamint a köbtartalom képlete is.