Kiindulunk a másodfokú egyenlet általános alakjából

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

ebből

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b}. \tag{1}$$

Ha $\frac{a}{b}$ igen kis törtszám, akkor $-\frac{ax^2}{b}$ tagot egyelőre elhanyagolva, az első közelítő érték

$$x_1 = -\frac{c}{b}.$$

A második közelítő értéket úgy határozzuk meg, hogy (1)-ben x^2 helyébe $x_1 = -\frac{c}{b}$ értéket írunk, azaz

$$x_2 = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x_1^2.$$

Hasonló módon

$$x_3 = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x_2^2,$$

és így tovább.

A számításnál két esetet különböztetünk meg, 1., ha a gyökök egyenlő előjelűek, 2., ha ellenkező előjelűek.

I. A két gyök egyenlő előjelű.

Az egyenlő előjelű gyököket mindig pozitívoknak vehetjük; mert ha negatívok volnának, csak x helyébe $-x$ értéket kell írnunk. Az egyenlet, melynek pozitív gyökei vannak, ilyen alakú:

$$ax^2 - bx + c = 0, \tag{2}$$

hol $a,\ b,\ c$ pozitív egész számokat jelentenek. A kisebbik gyök értéke:

$$x' = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

A gyöknek ezt az alakját vesszük a számítás alapjául.

Az adott egyenletből

$$x = \frac{c}{b} + \frac{ax^2}{b};$$

$$x_1 = \frac{c}{b};\ x_2 = \frac{c}{b} + \frac{ax_1^2}{b}.$$

$$x_3 = \frac{c}{b} + \frac{ax_2^2}{b}; \ldots x_n = \frac{c}{b} + \frac{ax_{n-1}^2}{b}.$$

Látni való, hogy x_1 kisebb, mint a (2) alatti egyenlet kisebbik gyöke.

Tudjuk ugyanis, ha a és c egyenlő előjelűek, akkor

$$b^2 - 4ac < b^2$$

következőleg

$$b + \sqrt{b^2 - 4ac} < 2b.$$

Azt is látjuk továbbá, hogy

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots x_n < x',$$

minthogy a közelítő értékek sorában x^2 helyébe sohasem a valódi gyököt írtuk, hanem mindig annál kisebb számot. Eszerint $x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots x_n$ számok folyton nőnek és mindinkább közelednek a valódi értékhez.

Ha az első közelítő érték és a valódi gyök közötti hibát α_1-gyel jelöljük, akkor

$$\alpha_1 = x' - x_1 = \frac{c}{b} + \frac{a}{b}x'^2 - \frac{c}{b} = \frac{a}{b}x'^2.$$

De minthogy

$$x' = \frac{2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

ennélfogva

$$x' < \frac{2c}{b},\ x'^2 < \frac{4c^2}{b^2},\ \frac{ax'^2}{b} < \frac{4ac}{b^2} \cdot \frac{c}{b};$$

ebből pedig az következik, hogy

$$\alpha_1 < \frac{4ac}{b^2} \cdot \frac{c}{b}.$$

Az n-edik közelítő értékre nézve pedig áll, hogy

$$\alpha_n = x' - x_n = \frac{c}{b} + \frac{a}{b}x'^2 - \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{b}x_{n-1}^2\right) = \frac{a}{b}(x'^2 - x_{n-1}^2) =$$

$$= \frac{a}{b}(x' + x_{n-1})(x' - x_{n-1}) = \frac{a}{b}(x' + x_{n-1})\alpha_{n-1}.$$

De $x' + x_{n-1} < 2x'$, minthogy pedig $x' < \dfrac{2c}{b}$, annyival inkább áll, hogy $x' + x_{n-1} < \dfrac{4c}{b}$. Ezt figyelembe véve, látjuk, hogy

$$\alpha_n < \frac{4ac}{b^2}\alpha_{n-1}.$$

Ha n helyébe $2,\ 3,\ 4,\ ...n-1,\ n$ értékeket írunk, a következő sort kapjuk:

$$\alpha_1 < \frac{4ac}{b^2} \times \frac{c}{b}; \qquad \alpha_2 < \frac{4ac}{b^2} \times \alpha_1;$$

$$\alpha_3 < \frac{4ac}{b^2}\alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_n < \frac{4ac}{b^2}\alpha_{n-1}.$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket egymással sokszorozva a következő eredményre jutunk

$$\alpha_n < \frac{c}{b}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n.$$

Ha az egyenlet két gyöke reális, vagyis ha $\dfrac{4ac}{b^2} < 1$, akkor x_n közelítő értékénél a hiba (α_n) kisebb lesz bármely adott számnál, ha n elég nagy.

Példa. Keressük a következő egyenlet gyökeit:

$$5x^2 - 12500x + 516 = 0.$$

Ebben az egyenletben

$$a = 5; \qquad b = 12500; \qquad c = 516.$$

$$\frac{4ac}{b} = \frac{10320}{156250000}; \qquad \frac{4ac}{b^2} < \frac{1}{10^4},$$

tehát az eljárás alkalmazható.

$$x_1 = \frac{c}{b} = \frac{516}{12500}.$$

A hiba

$$\alpha_1 < \frac{4ac}{b^2} \times \frac{c}{b};\ \text{de}\ \frac{4ac}{b^2} < \frac{1}{10^4},\ \frac{c}{b} = 0,04128,$$

vagyis

$$\frac{c}{b} < 0,05,$$

ennélfogva

$$\alpha_1 < \frac{5}{10^6}.$$

Ha még egyszer alkalmazzuk az eljárást, akkor

$$x_2 = \frac{c}{b} + \frac{a}{b}x_1^2.$$

Ebben az esetben a hiba

$$\alpha_2 < \frac{4ac}{b^2}a_1,$$

vagyis

$$\alpha_2 < \frac{1032}{15625 \cdot 10^3} \cdot \frac{5}{10^6}; \quad \alpha_2 < \frac{5}{10^{10}}.$$

A második közelítő gyök pedig

$$x_2 = 0,04128 + 0,00000068161536 = 0,041280681.$$

A második gyököt most már könnyen kiszámíthatjuk; a gyökök összege ugyanis

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = 2500,$$

tehát

$$x'' = 2500 - 0,041280681 = 2499 \cdot 958719319.$$

II. A két gyök ellenkező előjelű.

Ha a gyökök ellenkező előjelűek, mindig feltehetjük, hogy a kisebb absolut értékű gyök a pozitív; mert ha a kisebb absolut értékű gyök negatív volna, akkor x helyébe $-x$-et írva, oly egyenletet kapunk, mely ennek a feltételnek megfelel. Az adott egyenlet tehát ilyen alakú lesz:

(1) $$ax^2 + bx - c = 0,$$

ebből pedig

(2) $$x = \frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b}.$$

A közelitő értékek:

$$x_1 = \frac{c}{b}, \ x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x_1^2;$$

$$x_3 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x_2^2, \dots, x_n = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x_{n-1}^2.$$

Amint látjuk, x_1 nagyobb a (2) alatti egyenlet bármelyik közelitő gyökénél, tehát $x_1 > x'$; ellenben $x_2 < x'$ mivel $\frac{c}{b}$ törtből egy másik törtszámot kell levonni, mely nagyobb a valódi gyöknél. Pozitív gyökről lévén szó, x_2 negatív nem lehet, tehát

$$x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot \frac{c^2}{b^2} > 0,$$

vagyis

$$ac < b^2.$$

Ha ennek a feltételnek megfelelünk, akkor

$$0k < x_2 < x',$$

(3) $$x_3 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x_2^2.$$

Összehasonlítva a valódi gyököt kifejező egyenlettel:

$$x' = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x'^2,$$

látjuk, hogy a (3) alatti egyenlet kivonandója

$$\frac{a}{b}x_2^2 < \frac{a}{b}x'^2,$$

ennélfogva

$$x_3 > x';$$

de mivel $x_2 > x_1$, ennélfogva

$$x_1 > x_3 > x'.$$

Hasonló okoskodással találjuk, hogy

(4) $$x_4 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x_3^2.$$

kifejezésben $x_4 < x'$, mivel $x_3 > x'$. Mivel továbbá $x_3 < x_1$, ennélfogva

$$x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x_1^2$$

kifejezéssel hasonlítva össze a (4) alatti kifejezést, látjuk, hogy

$$x_4 > x_2.$$

Ezt az eljárást folytatva, a következő két egyenlőtlenségre jutunk

$$x_1 > x_3 > x_5 \ldots > x_{2n-1} > x'$$

$$x_2 < x_4 < x_6 \ldots < x_{2n} < x'$$

A páratlan mutatójú közelítő gyökök folyton kisebbedő sort adnak, melynek általános tagja annál jobban megközelíti a valódi gyököt (x') minél nagyobb n. A páros mutatójú közelítő gyökök ellenben folyton növekedő sort alkotnak, melynek általános tagja annál jobban megközelíti a valódi (x') gyököt, minél nagyobb n.

Ha x_{2p+1} páratlan mutatójú közelítő gyöknek megfelelő hibát α_{2p+1}-gyel jelöljük, akkor

$$\alpha_{2p+1} = x_{2p+1} - x' = \left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x_{2p}^2\right) - \left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x'^2\right) = \frac{a}{b}(x'^2 - x_{2p}^2) =$$

$$= \frac{a}{b}(x' + x_{2p})(x' - x_{2p}) = \frac{a}{b}(x' + x_{2p})\alpha_{2p}.$$

De x_{2p} kisebb, mint $x_1 = \dfrac{c}{b}$, hogy pedig $x' < \dfrac{c}{b}$, az az adott egyenlet gyökének megvizsgálásából következik:

$$x' = \frac{2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Mivel a és c ellenkező előjelűek, ennélfogva $-4ac$ szorzat pozitív előjelű, tehát

$$\sqrt{b^2 - 4ac} > b;$$

ha tehát a gyökmennyiség helyett a kisebb értéket írjuk, akkor

$$x' > \frac{c}{b}.$$

Mivel tehát

$$x' + x_{2p} < \frac{2c}{b},$$

ennélfogva

(5) $$\alpha_{2p+1} < \frac{2ac}{b^2}\alpha_{2p}.$$

Az első közelítő törtre nézve

$$x_1 = \frac{c}{b},\ x' = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x'^2,$$

tehát

$$\alpha_1 = \frac{a}{b}x'^2 < \frac{a}{b} \cdot \frac{c^2}{b^2}$$

(6) $$\alpha_1 < \frac{2ac}{b^2} \cdot \frac{c}{2b}.$$

Számítsuk ki most a páros mutatójú közelítő gyöknek megfelelő hibát.

$$\alpha_{2p} = x' - x_{2p} = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x'^2 - \left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x_{2p-1}^2\right) =$$

$$= \frac{a}{b}(x' + x_{2p-1})(x' - x_{2p-1}) = \frac{a}{b}(x' + x_{2p})\alpha_{2p-1}.$$

De tudjuk, hogy x' is, x_{2p-1} is kisebb, mint $x_1 = \dfrac{c}{b}$, azaz

$$x' + x_{2p-1} < \frac{2c}{b},$$

ennélfogva

(7) $$\alpha_{2p} < \frac{2ac}{b^2}\alpha_{2p-1}.$$

Az (5), (6) és (7) alatti egyenlőtlenségek segítségével az egyenlőtlenségek következő sorához jutunk, ha p helyébe $2,\ 3,\ 4,\ \dots,\ n-1,\ n$ értékeket írunk:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 < \frac{2ac}{b^2}\cdot\frac{c}{2b}\\
&\alpha_2 < \frac{2ac}{b^2}\cdot\alpha_1\\
&\alpha_3 < \frac{2ac}{b^2}\cdot\alpha_2\\
&\dots\\
&\alpha_n < \frac{2ac}{b^2}\cdot\alpha_{n-1}.
\end{aligned}\tag{8}$$

Ezen egyenlőtlenségek megfelelő tagjait egymással sokszorozva, a következő eredményre jutunk:

$$\alpha_n < \left(\frac{2ac}{b^2}\right)^n\frac{c}{2b}.$$

Ha $\frac{2ac}{b^2} < 1$, a hiba annál kisebb lesz, minél nagyobb n; sőt ha n elég nagy, a hiba kisebb lehet bármely pozitív számnál.

Példa: Keressük

$$3x^2 + 132x - 11 = 0$$

egyenlet gyökeit. Mivel itt $\frac{2ac}{b^2} = \frac{1}{264}$, az eljárás alkalmazható. Az első közelítő gyök

$$x_1 = \frac{c}{b} = \frac{11}{132} = \frac{1}{12};$$

a hiba ezen a fokon

$$\alpha_1 < \frac{2ac}{b^2}\cdot\frac{c}{2b} < \frac{1}{264}\cdot\frac{11}{264},$$

azaz

$$\alpha_1 < \frac{1}{6336}$$

annyival inkább

$$\alpha_1 < 0,0002 < \frac{2}{10^4}.$$

Menjünk át a második közelítő értékre

$$x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x_1^2 = \frac{1}{12} - \frac{3}{132}\cdot\frac{1}{12^2} = \frac{1}{12} - \frac{1}{44\cdot 144} =$$
$$= \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{44\cdot 12}\right) = \frac{1}{12}\cdot\frac{527}{528} = \frac{527}{6336} = 0,083177083.$$

A hiba ezen a fokon

$$\alpha_2 < \frac{2ac}{b^2}\cdot\alpha_1$$
$$\alpha_2 < \frac{1}{264}\cdot\frac{1}{6336}$$
$$a_2 < \frac{1}{264^2}\cdot\frac{1}{24}.$$

Annyival inkább áll, hogy

$$\alpha_2 < \frac{1}{250^2}\cdot\frac{1}{24};$$

ebből pedig

$$\alpha_2 < \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1000^2} = \frac{0,6}{10^6}.$$

Eszerint 10^{-6} pontossággal

$$x' = 0,083177.$$

A másik gyök értékét most már könnyen kiszámíthatjuk:

$$x' + x'' = -44,$$

tehát

$$x'' = -44,083177.$$

Makó. *László Ignác.*[1]

[1]Jegyzet. Forrásul felhasználtam: Vacquant, Lecons d 'Algebre, XIII. kiadás.