Első segédtétel. Egyenlő kerületi hegyesszögekhez tartozó húrok viszonyai saját körük átmérőihez egyenlők.

Bizonyítás. Jelöljük a $2r_1$ illetőleg $2r_2$ átmérőjű körökben az α kerületi szöghöz tartozó húrok hosszait a_1-gyel és a_2-vel és válasszuk ki éppen azokat a kerületi szögeket, melyeknek egyik száruk átmegy a körök O_1, illetőleg O_2 középpontján. Ez esetben két hasonló derékszögű háromszöget nyertünk, melyekből:

$$\frac{a_1}{2r_1} = \frac{a_2}{2r_2}.$$

Második segédtétel. Ha két kerületi hegyesszöghöz tartozó húrok viszonyai saját körük átmérőihez egyenlők, akkor a két kerületi szög is egyenlő.

Bizonyítás. A $2r_1$ és $2r_2$ átmérőjű körökben az a_1, illetőleg a_2 húrokon nyugvó kerületi hegyesszögek közül válasszuk ki éppen azokat, melyeknek egyik száruk átmegy a körök középpontjain. Minthogy az így keletkező két derékszögű háromszögben

$$\frac{a_1}{2r_1} = \frac{a_2}{2r_2},$$

azért a háromszögek hasonlók és így az a_1 és a_2 húrokkal szemben fekvő kerületi hegyesszögek is egyenlők.

Nevezzük az α kerületi hegyesszöggel szemben fekvő (a) húr viszonyát az átmérőhöz $(2r)$ az α szög sinusának

$$\sin\alpha = \frac{a}{2r},$$

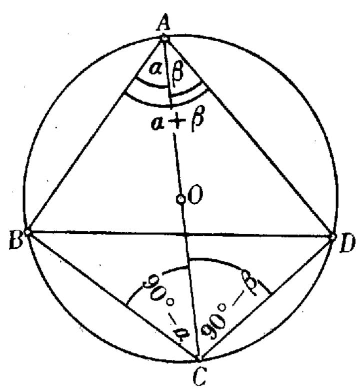
akkor az (1) és (2) segédtétel így foglalható össze:

Valamely hegyesszög egyértelműleg határozza meg sinusát és valamely hegyesszög sinusa egyértelműleg határozza meg magát a szöget.

Minthogy a húr mindig kisebb az átmérőnél, azért valamely hegyes szög sinusa mindig pozitív valódi tört.

I. alaptétel. Ha az α és β hegyesszögek összege ismét hegyesszög, akkor

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\sin(90^\circ-\beta) + \sin(90^\circ-\alpha)\sin\beta.$$



Bizonyítás. Mérjük az α és β szögeket az AC átmérő két különböző oldalára, úgy hogy $CAB\sphericalangle = \alpha$ és $CAD\sphericalangle = \beta$ legyen, akkor Ptolemaios tétele értelmében

$$BD\cdot AC = AD\cdot BC + AB\cdot CD.$$

Minden tagot $\overline{AC}^2$-tel osztva

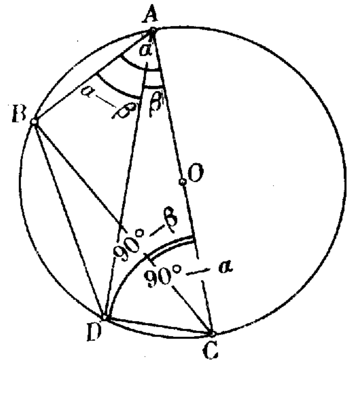
$$\frac{BD}{AC} = \frac{AD}{AC}\cdot\frac{BC}{AC} + \frac{AB}{AC}\cdot\frac{CD}{AC}$$

vagyis:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\sin(90^\circ-\beta) + \sin(90^\circ-\alpha)\sin\beta.$$

II. alaptétel. Ha az α és β hegyesszögek közül $\alpha>\beta$, akkor

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\sin(90^\circ-\beta) - \sin(90^\circ-\alpha)\sin\beta.$$



Bizonyítás. Mérjük az α és β szögeket az AC átmérő két egyazon oldalára, úgy hogy $CAB\sphericalangle = \alpha$ és $CAD\sphericalangle = \beta$ legyen, akkor Ptolemaios tétele szerint:

$$BD \cdot AC = BC \cdot AD - AB \cdot CD.$$

Ebből ismét

$$\frac{BD}{AC} = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AD}{AC} - \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CD}{AC},$$

tehát:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \sin(90^\circ - \beta) - \sin(90^\circ - \alpha)\sin\beta.$$

Ha α hegyesszög, akkor $(90^\circ - \alpha)$ is az; ha $\sin(90^\circ - \alpha)$-t ismerjük, akkor meghatározhatjuk $(90^\circ - \alpha)$-t és ebből α-t is. Azt mondhatjuk tehát, hogy $\sin(90^\circ - \alpha)$ meghatározza az α-t és ebben a minőségben ezt az értéket az α szög cosinusának nevezzük:

$$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha).$$

Ez új jelölést bevezetve alaptételeink így alakulnak:

$$I.\ \ \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$II.\ \ \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

III. alaptétel. Ha az α és β hegyesszögek összege ismét hegyesszög:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Bizonyítás.

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin[90^\circ - (\alpha + \beta)] = \sin[(90^\circ - \alpha) - \beta] =$$
$$= \sin(90^\circ - \alpha)\cos\beta - \cos(90^\circ - \alpha) \cdot \sin\beta,$$

ámde

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin[(90^\circ - (90^\circ - \alpha)] = \sin\alpha,$$

tehát

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

IV. alaptétel. Ha az α és β hegyesszögek közül $\alpha > \beta$, akkor

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Bizonyítás.

$$\cos(\alpha - \beta) = \sin[(90^\circ - \alpha) + \beta] = \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

tehát

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Állapodjunk meg már most abban, hogy *bármely* szög függvényeit úgy akarjuk értelmezni, hogy az $I - IV$. alaptételek érvényben maradjanak. Bármely szögre nézve legyen tehát:

(I.) $$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

(II.) $$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

(III.) $$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

(IV.) $$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Ha $\alpha = \beta$, akkor (II)-ből: $\sin\alpha = 0$.

Ha (I)-ben $\beta = 0$, akkor: $\sin\alpha = \sin\alpha\cos 0^\circ$,

vagyis

$$\cos 0^\circ = 1.$$

A (IV)-ből: $\alpha = \beta$ esetében: $\cos 0 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Ha $\alpha = 0$, akkor (II)-ből: $\sin(-\beta) = -\sin\beta$

és (IV)-ből $\cos(-\beta) = \cos\beta$.

Ha $\alpha=\beta=45^\circ$, akkor (I)-ből:

$$\sin 90^\circ = 2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \text{ és (III)-ból: } \cos 90^\circ = 0.$$

Ha $\alpha = 90^\circ$, akkor (II)-ből: $\sin(90^\circ-\beta)=\cos\beta$
és (IV)-ből:

$$\cos(90^\circ-\beta)=\sin\beta.$$

Ha $\alpha=\beta=90^\circ$, akkor (I)-ből: $\sin 180^\circ = 0$
és (III)-ból

$$\cos 180^\circ = -1.$$

Ha $\alpha=180^\circ$, akkor (II)-ből: $\sin(180^\circ-\beta)=\sin\beta$
és (IV)-ből:

$$\cos(180^\circ-\beta)=-\cos\beta.$$

Ha valamely $2r$ sugarú körben az $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ húroknak megfelelő kerületi szögek $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$, akkor

(A) $$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = \sin a_1 : \sin a_2 : \sin a_3 : \ldots \sin a_n.$$

Ez a húrok sinustétele.
Háromszög esetén e tétel következtében

(A*) $$a : b : c = \sin\alpha \sin\beta : \sin\gamma.$$

Ha pl. n húr van adva, melyekkel szemben fekvő kerületi szögek közt m összefüggés van adva ($m < n+1$), akkor fennáll a következő $(n+m)$ egyenlet:

$$a_i = 2r\sin a_i, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

$$f_k(a_1,\ a_2\ ,\ldots,\ a_n)=0, \qquad (k(1.\ 2,\ \ldots,m)$$

Eme $n+m$ egyenlet $2n+1$ adatot tartalmaz, tehát általában $n-m+1$ alkatrész megadása után a hiányzó $n+m$ adat kiszámítható. Érdekes az az eset, ha

$$a = 2r\sin\alpha, \qquad b = 2r\sin\beta, \qquad c = 2r\sin\gamma \qquad \text{és} \qquad \alpha+\beta+\gamma = 180^\circ.$$

Ez a négy egyenlet használható a háromszögek megoldásánál. Hogy a sinustétel hogyan nyerhető, már láttuk, még csak a Carnot-tételt akarom levezetni,

$$\sin\alpha = \sin[180^\circ-(\beta+\gamma)] = \sin(\beta+\gamma,)$$

tehát

$$\sin^2\alpha = [\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma]^2 = \sin^2\beta(1-\sin^2\gamma)+$$
$$+2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma + (1-\sin^2\beta)\sin^2\gamma =$$
$$=\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2\sin\beta\sin\gamma(\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma)$$

vagy

$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta+\sin^2\gamma+2\sin\beta\sin\gamma\cos(\beta+\gamma)$$

és így

(B) $$\sin^2\alpha = \sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$$

Ebből ismét $4r^2$-tel minden tagot szorozva:

(B*) $$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

Valójában tehát a Carnot-féle tétel három –együttvéve 180°-t kitevő – szög szögfüggvényeinek összefüggését fejezi ki.

Derékszögű háromszög esetén a következő öt egyenlet áll rendelkezésünkre:

$$a = 2r\sin\alpha,\ b = 2r\sin\beta,\ c = 2r\sin\gamma,$$

$$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ,\ \gamma = 90^\circ,$$

tehát

$$c = 2r$$

és így az ismert tételek:

$$a = c \sin \alpha,\ b = c \sin \beta = c \cos \alpha.$$

Ezekből ismét

$$c = a\frac{1}{\sin \alpha},\ c = b\frac{1}{\cos \alpha},$$

$$a = b\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},\ b = a\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Szimmetria kedveért szokásos bevezetni a következő új szögfüggvényeket:

$$\mathrm{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin \alpha},$$

$$\mathrm{sec}\alpha = \frac{1}{\cos \alpha},$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

mely esetben derékszögű háromszögekben:

$$c = a \ \mathrm{cosec}\ \alpha,\ c = b\ \mathrm{sec}\ \alpha,\ a = b\ \mathrm{tg}\ \alpha,\ b = a\ \mathrm{ctg}\ \alpha.$$

A rendelkezésemre álló szűk hely miatt csak e vázlatot közölhettem és így csak azok tanulhatnak belőle, kik a trigonometriával már amúgy is foglalkoztak. Célom az volt, hogy a goniometriát és trigonometriát, mint a húrtan alkalmazásait mutassam be és közben az alapfogalmakat egész szigorúsággal állítsam oda.