Bővítsük a törtet $(1-ab)(1+ca)$-val. (E szorzat 0-tól különböző, mert bármelyik tényezőjének eltűnése esetén a kifejezésnek sem volna értelme.) Így az előre is látható összevonások után megmaradó 4–4 tag egyszerű kiemelésekkel 2–2 kéttagú szorzatává alakítható. A számláló és nevező $1+a^2$ közös tényezője biztosan pozitív, ezzel ismét egyszerűsíthetünk, tehát a kifejezés:

$$K=\frac{b+a^2c+c+a^2b}{1-a^2bc-bc+a^2}=\frac{(b+c)(1+a^2)}{(1-bc)(1+a^2)}=\frac{b+c}{1-bc}.$$

Innen látjuk, hogy $K$ akkor sem volna értelmezve, ha $1-bc=0$ volna.

A kifejezésben kétszer előforduló

$$(1)\qquad \frac{a+b}{1-ab}=d \qquad \text{és} \qquad \frac{c-a}{1+ca}=e$$

hányadosok szerkezete, úgyszintén $K$-nak ezek beírásával adódó

$$(2)\qquad K=\frac{d+e}{1-de}$$

alakjáé, végül a fenti átalakítás eredményéé is – egyaránt a tangens–függvény addíciós képletét, a

$$(3)\qquad \operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$$

azonosságot juttatja eszünkbe, amelyből a $\operatorname{tg}(x-y)$-ra ismert azonosság $\operatorname{tg}(-y)=-\operatorname{tg}y$ figyelembevételével adódik.

Ha tehát megkeressük azt a $-90^\circ$ és $90^\circ$ közti $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ szöget, amelyre

$$(4)\qquad \operatorname{tg}\alpha=a, \qquad \operatorname{tg}\beta=b, \qquad \operatorname{tg}\gamma=c,$$

akkor (1)-ből (3) figyelembevételével

$$(5)\qquad d=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta) \qquad \text{és} \qquad \mathrm{e}=\operatorname{tg}(\gamma-\alpha).$$

Ezeket (2)-be helyettesítve hasonlóan

$$(6)\qquad K=\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)}{1-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)}=\operatorname{tg}\big[(\alpha+\beta)+(\gamma-\alpha)\big]=\operatorname{tg}(\beta+\gamma).$$

Innen (3) alapján való átalakítással, végül (4) alapján az eredeti jelölésekre visszatérve közbülső számítások nélkül jutunk el az eredeti átalakítás végeredményéhez.

Meg kell jegyeznünk, hogy az említett $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ szög bármely $a$, $b$, $c$ esetén létezik, mert az $y=\operatorname{tg}\mathrm{x}$ függvény minden értéket felvesz. Ha azonban vagy

$$(7)\qquad 1-ab=0,$$

vagy

$$(8)\qquad 1+ca=0$$

volna, vagy e két egyenlőség mindegyike teljesülne, akkor a goniometriai átalakítás sem érvényes. Valóban, (7)-ből $ab=1$, így $a$ és $b$ egyike sem 0, $b=1/a$, vagyis $\operatorname{tg}\beta=\operatorname{ctg}\alpha$ tehát $\alpha$ és $\beta$ vagy pótszögek, összegük $90^\circ$, vagy $\alpha+\beta=-90^\circ$, és ezek tangense nincs értelmezve; hasonlóan (8) fennállása esetén $c=-1/a$, $\operatorname{tg}\gamma=-\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}(-\alpha)$, tehát $\gamma+(-\alpha)=\pm 90^\circ$, tehát (5)-nek nincs értelme. Ezekben az esetekben a goniometriai átalakítás sem kezdhető el, – akárcsak az algebrai. És a megkezdett átalakítás nem fejezhető be (6)-tal, ha azt találjuk, hogy $\beta+\gamma=90^\circ$, megfelelően az $1-bc=0$ esetre vonatkozó kizáró megjegyzésünknek.

*Fazekas Patrik* (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. Gimn. II. o. t.)