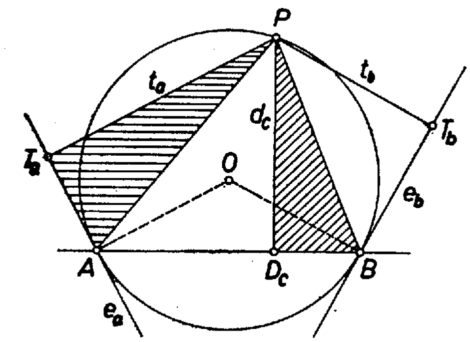
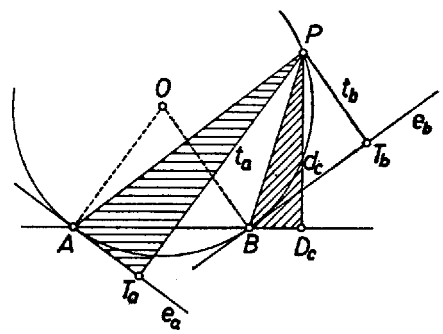
Feltehetjük, hogy P az ABC háromszög csúcsaitól különböző pontja k-nak, ugyanis az ellentétes esetben az állítás nyilvánvalóan igaz: mindkét szorzat értéke 0. Megmutatjuk, hogy P-nek bármelyik oldaltól való távolsága mértani középarányos az illető oldal végpontjaiban húzott érintőktől való távolságoknak, pl. $d_c^2 = t_a t_b$.



1. ábra



2. ábra

Legyen P vetülete az AB oldalon D_c, az A csúcsbeli e_a érintőn T_a, a B-beli e_b érintőn T_b. Egyelőre feltesszük, hogy T_a nem azonos A-val, és D_c nem azonos B-vel. Ekkor a PAT_a és PBD_c derékszögű háromszögek hasonlók, mert PAT_a, ill. PBD_c hegyesszögük egyenlő. Ugyanis a PAT_a hegyesszög k-ban kerületi szög, és így szárai között a kisebb PA ív fekszik. A PBD_c szög a PBA kerületi szöggel vagy azonos – ha ti. D_c a BA félegyenesen van –, vagy annak kiegészítő szöge – ha D_c az AB oldal B-n túli meghosszabbításának pontja (1-2. ábra). A PBA szög az előbbi esetben hegyesszög, az utóbbiban tompaszög, ezért szárai között k-ból a kisebb, ill. nagyobb PA ív fekszik. Ezért az első esetben PBA egyenlő a PAT_a szöggel, a másodikban pedig annak kiegészítő szöge. Így a PBD_c hegyesszög valóban mindig egyenlő a PAT_a szöggel.

A bebizonyított hasonlóság alapján

(1) $$\frac{PT_a}{PD_c} = \frac{t_a}{d_c} = \frac{PA}{PB}.$$

Ugyanígy a PBT_b és PAD_c derékszögű háromszögek hasonlóságából

(2) $$\frac{PT_b}{PD_c} = \frac{t_b}{d_c} = \frac{PB}{PA},$$

végül (1) és (2) összeszorzásából

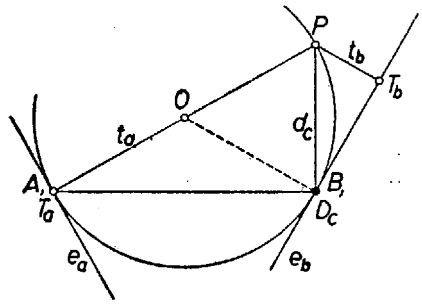
(3) $$\frac{t_a t_b}{d_c^2} = 1, \qquad \text{azaz} \qquad t_a t_b = d_c^2.$$

Ezt akartuk bizonyítani.

A fentebbi PAT_a és PBD_c derékszögű háromszögek akkor és csak akkor fajulnak el a PA, ill. PB egyenesszakasszá, ha P a k-nak A-val átellenes pontjában van (3. ábra). Ekkor a PAB derékszögű háromszög hasonló PBT_b-höz, mert A-nál, ill. B-nél levő szögük a PB íven fekvő kerületi szög, ennélfogva

$$PA : PB = PB : PT_b,$$

amiből közvetlenül kapjuk (3)-at. Hasonlóan egyszerű a bizonyítás akkor is, ha P a B-vel átellenes pontban van.



3. ábra

Most már (3)-at és a betűk megfelelő felcserélésével adódó

$$t_b t_c = d_a^2, \qquad t_c t_a = d_b^2$$

egyenlőségeket összeszorozva

$$t_a^2 t_b^2 t_c^2 = d_a^2 d_b^2 d_c^2.$$

Innen pedig négyzetgyökvonással, és figyelembe véve, hogy a szóban forgó távolságok nem lehetnek negatívok, a bizonyítandó állítást kapjuk.

Megjegyzések. 1. Több dolgozat csak 1 – 1 konkrét helyzetre bizonyította a felhasznált hasonlóságot és ebben esetenként más-más szögegyenlőségre hivatkozott. Közülük néhányan legalább említették, hogy más helyzetben a bizonyításban lényegtelen módosítások szükségesek.

2. Akkor is több eset szétválasztására van szükség, ha (3)-at egyetlen háromszög-pár: PT_aD_c és PD_cT_b hasonlósága alapján kívánjuk bizonyítani, pl. a PD_cAT_a és PT_bBD_c húrnégyszögek felhasználásával.

3. A (3) összefüggést az 1961. évi Országos Középiskolai Matematikai Verseny II. fordulója 2. feladatának[1] eredményéből is kiolvashatjuk.

[1]Lásd K. M. L. 24 (1962) 2. o.