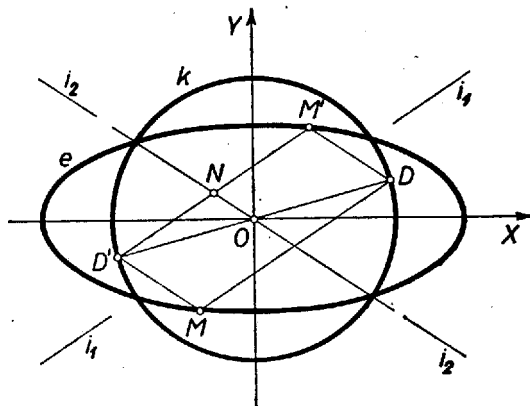


**I. megoldás.** Az átmérő  $D, D'$  végpontjai és a kérdéses  $M, M'$  metszéspontok paralelogrammát határoznak meg.  $M$  és  $M'$  mértani helye szimmetrikus  $k$ -nak  $O$  középpontjára, mert a paralelogramma egyik átlója  $DD'$ . Szimmetrikus a mértani hely a körben az  $i_1$  és  $i_2$ -vel párhuzamos átmérők közti szögek  $f_1, f_2$  felezőire is, mert ha a  $d'$  átmérő tükörképe  $f_1$ -re  $d''$ , akkor a  $d''$  végpontjain átmenő,  $i_1$ -gyel párhuzamos egyenesek tükörések a  $d'$  végpontjain átmenő,  $i_2$ -vel párhuzamos egyenesekkel és megfordítva.

Ha  $i_1$  és  $i_2$  merőlegesek, akkor a mértani hely maga  $k$ , hiszen így a  $DMD'M'$  paralelogramma derékszögű, átlói egyenlők, tehát  $M$  és  $M'$  a  $k$ -n vannak, – és megfordítva  $k$ -nak bármely  $M$  pontjához található olyan  $DD'$  átmérő, amelyhez az előírás szerint szerkesztett metszéspontok egyike éppen  $M$ , és pedig  $DD'$ -t az  $M$ -hez tartozó  $MM'$  átmérő végpontjaiból az eredeti szerkesztéssel kapjuk.

Ha  $i_1$  és  $i_2$  nem merőlegesek, akkor több pontpár megszerkesztése után sejtjük, hogy a mértani hely ellipszis. Ezt a koordinátageometria módszereivel igazoljuk. Tengelyeknek az említett szögfelezőket célszerű választani, így az origó a  $k$  kör középpontja lesz, – egységnek pedig vegyük  $k$  sugarát. Legyen  $i_1$  iránytangense  $m$ , így  $i_2$  iránytangense  $-m$ . A szimmetria miatt, és mivel az  $i_1 \perp i_2$  esetet már láttuk – ott  $m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$  –, elég a  $0 < m < 1$  értékekre gondolnunk. (Nyilvánvaló ugyanis, hogy  $i_1$  és  $i_2$  különbözők, és így  $m = 0$  lehetetlen.)



Vegyük  $D$  gyanánt  $k$ -nak  $(\xi, \eta)$  pontját, így  $D'(-\xi, -\eta)$ . A  $D$ -n átmenő  $i_2$  és a  $D'$ -n átmenő  $i_1$  irányú egyenes egyenlete:

$$(1) \quad y - \eta = m(x - \xi),$$

ill.

$$y + \eta = -m(x + \xi).$$

Innen  $M$  metszéspontjuk koordinátái:

$$(2) \quad \begin{aligned} x^* &= -\frac{\eta}{m}, \\ y^* &= -m\xi, \end{aligned}$$

a  $D$ -n átmenő  $i_2$  irányú és a  $D'$ -n átmenő  $i_1$  irányú egyenesek metszéspontja pedig hasonlóan  $M'(-x^*, -y^*)$ , ugyanis egyenletüket úgy kapjuk, ha (1) mindkét egyenletében  $m$  helyére  $-m$ -et írunk.

Az  $x^*$  és  $y^*$  között fennálló összefüggést abból kapjuk, hogy a  $(\xi, \eta)$  számpár kielégíti  $k$ -nak  $x^2 + y^2 = 1$  egyenletét. (2)-ből

$$\xi = -\frac{y^*}{m}, \quad \eta = -mx^*,$$

így

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{y^{*2}}{m^2} + m^2x^{*2} = 1,$$

amit így is írhatunk:

$$(3) \quad \frac{x^{*2}}{\left(\frac{1}{m}\right)^2} + \frac{y^{*2}}{m^2} = 1.$$

Eszerint valóban minden  $M(x^*, y^*)$  pont – és minden  $M'(-x^*, -y^*)$  is – rajta van azon az ellipszisen, amelyre az  $x$ -tengelyen fekvő szimmetriatengely félhossza  $1/m$ , a másik tengelyé pedig  $m$ . (Ezek a feltevés folytán különbözők, az előbbi a nagy tengely.)

Fordítva, a (3) ellipszis bármely  $M(x^*, y^*)$  pontjához található  $k$ -nak olyan  $DD'$  átmérője, amelyhez a feladat utasítása szerint szerkesztett metszéspontok egyike éppen  $M$ . Ugyanis az  $M$ -en átmenő  $i_1$  irányú és  $M'(-x^*, -y^*)$ -on átmenő  $i_2$  irányú egyenesek egyenlete

$$y - y^* = m(x - x^*), \quad \text{ill.} \quad y + y^* = -m(x + x^*),$$

ennélfogva  $D$  metszéspontjuk koordinátái:

$$\xi^* = -\frac{y^*}{m} \quad \text{és} \quad \eta^* = -mx^*,$$

ezekre (3) szerint  $\xi^{*2} + \eta^{*2} = 1$ , vagyis  $D$  a  $k$ -n van, továbbá (2) szerint a  $D$ -ből az eredeti szerkesztéssel kapott metszéspontok éppen  $M$  és  $M'$ .

Mindezek szerint a keresett mértani hely a (3) egyenlettel meghatározott  $e$  ellipszis.

*Schönweitz Tivadar* (Pannonhalma, Bencés g. III. o. t.)

**II. megoldás.**  $D'M'$  és az  $i_2$ -vel párhuzamos átmérő egyenesének metszéspontját  $N$ -nel jelölve  $ON$  a  $DD'M'$  háromszög középvonala, ezért  $M'N : D'N = 1$ . Eszerint  $M'$  a  $D'$  pont megfelelője abban az affinitásban, amelynek iránya  $i_1$ , tengelye az  $O$ -n átmenő,  $i_2$  irányú egyenes, és aránymutatója az egység – megjegyezve még, hogy a megfelelő pontok a tengely két oldalán helyezkednek el. (Más szóval: az aránymutató  $-1$ .) Mivel kör affin képe (általában) ellipszis, azért míg  $D$  leírja  $k$ -t, addig  $M$  a  $k$ -nak az említett affinitásban megfelelő ellipszist írja le.

*Sebestyén Zoltán* (Celldömölk, Berzsenyi D. g. III. o. t.)

*Megjegyzések.* 1. Az az affinitás, amelynek iránya  $i_2$ , tengelye a  $k$ -nak  $i_1$ -gyel párhuzamos átmérője, és aránymutatója 1, ugyancsak  $e$ -be viszi át  $k$ -t. A felcserélhetőség azon múlik, hogy az aránymutató értéke 1, ezért az ellipszis érinti  $k$ -nak  $i_1$  és  $i_2$ -vel párhuzamos érintőit, e két irányra merőlegesen a szélessége egyenlő  $k$  átmérőjével.

2. Néhány megoldás rámutatott, hogy a feladatban „irány”-on nem vektort értettünk.