A csonkakúp V térfogatának ismert képletében csak a keresett R és r $(R \geq r)$ sugarak ismeretlenek, így

$$R^2 + r^2 + Rr = \frac{3V}{\pi m} = A. \tag{1}$$

Az F felszín képletében ezeken felül a palást a oldalvonala is fellép:

$$R^2 + r^2 + (R+r)a = \frac{F}{\pi} = B,$$

de ez kifejezhető a sugarakkal és az m magassággal:

$$a = \sqrt{(R-r)^2 + m^2}.$$

Ezt beírva, a négyzetgyököt tartalmazó tagot egyedül a bal oldalon hagyva, és az egyenletet négyzetre emelve

$$(R^2 + r^2 + 2Rr)(R^2 + r^2 - 2Rr + m^2) = \left[B - (R^2 + r^2)\right]^2. \tag{2}$$

Tekintsük (1) és (2)-t az

$$R^2 + r^2 = u \qquad \text{és} \qquad Rr = v$$

ismeretlenekre vonatkozó egyenletrendszernek. Így

$$u + v = A, \tag{1'}$$

$$(u + 2v)(u - 2v + m^2) = B^2 - 2Bu + u^2. \tag{2'}$$

Innen u kiküszöbölése, majd rendezés után

$$(A+v)(A - 3v + m^2) = B^2 - 2B(A-v) + (A-v)^2,$$

$$4v^2 - (m^2 - 2B)v + (B^2 - 2AB - Am^2) = 0. \tag{3}$$

Az egyenlet diszkriminánsa szorzattá alakítható:

$$\begin{aligned}(m^2 - 2B)^2 - 16(B^2 - 2AB - Am^2) &= m^4 - 4Bm^2 - 12B^2 + 16A(m^2 + 2B) = \\ &= (m^2 + 2B)(m^2 - 6B + 16A).\end{aligned}$$

Így (3) gyökei

$$v = \frac{1}{8}\left[m^2 - 2B \pm \sqrt{(m^2 + 2B)(m^2 + 16A - 6B)}\right].$$

Végül $(1')$ szerint

$$u = A - v = \frac{1}{8}\left[8A + 2B - m^2 \mp \sqrt{(m^2 + 2B)(m^2 + 16A - 6B)}\right].$$

Most már, a gyökös kifejezést C-vel jelölve

$$(R+r)^2 = R^2 + r^2 + 2Rr = u + 2v = A + v = A + \frac{1}{8}(m^2 - 2B \pm C),$$

$$(R-r)^2 = u - 2v = A - 3v = A - \frac{3}{8}(m^2 - 2B \pm C),$$

végül négyzetgyökvonással és a nyert egyenletek összeadásával, ill. kivonásával:

$$R = \frac{1}{2}\left[\sqrt{A + \frac{1}{8}(m^2 - 2B \pm C)} + \sqrt{A - \frac{3}{8}(m^2 - 2B \pm C)}\right],$$

$$r = \frac{1}{2}\left[\sqrt{A + \frac{1}{8}(m^2 - 2B \pm C)} - \sqrt{A - \frac{3}{8}(m^2 - 2B \pm C)}\right].$$

u és v akkor és csak akkor valósak, ha (3) diszkriminánsában

$$m^2 + 16A \geq 6B,$$

és csak akkor vezethetnek a geometriai feladat megoldására, ha mindkettő pozitív és $u - 2v \geq 0$. Ettől függően a feltételnek megfelelő R, r értékpárok száma 2, 1, vagy 0. A részletesebb diszkusszió bonyolult, tekintettel arra, hogy 3 paraméter kölcsönös nagyságviszonyáról van szó.

Tattay Emőke (Budapest, Kaffka Margit lg. IV. o. t.)
Szoboszlai Levente (Hódmezővásárhely, Bethlen G. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Többen u helyett $R + r$ és más új ismeretlenek közbeiktatásával oldották meg a rendszert.