A p^α szám összes pozitív osztói: $1,\ p,\ p^2,\ \ldots,\ p^{\alpha-1},\ p^\alpha$; mértani sorozatot alkotnak, a hányados p, a tagok száma $\alpha+1$, tehát összegük

$$S_p=\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}.$$

A $p^\alpha p^\beta$ szám összes pozitív osztói $\alpha+1$ oszlopból és $\beta+1$ sorból álló táblázatba rendezhetők úgy, hogy az egy oszlopban álló osztókban p kitevője ugyanaz, q kitevője oszlopról oszlopra 0-tól 13-ig egyesével növekszik, – az egy sorban álló osztókban pedig q kitevője ugyanaz és p kitevője növekszik 0-tól α-ig.

$$\text{(1)}\qquad \begin{array}{llllll}
1, & p, & p^2, & \ldots, & p^{\alpha-1}, & p^\alpha,\\
q, & pq, & p^2q, & \ldots, & p^{\alpha-1}q, & p^\alpha q,\\
q^2, & pq^2, & p^2q^2, & \ldots, & p^{\alpha-1}q^2, & p^\alpha q^2,\\
. & . & . & \ldots, & . & .\\
q^\beta, & pq^\beta, & p^2q^\beta, & \ldots, & p^{\alpha-1}q^\beta, & p^\alpha q^\beta.
\end{array}$$

Az első sorbeli osztók összege S_p, a második sorbelieké qS_p, a harmadikbelieké $q^2S_p,\ldots$, az utolsó sorbelieké $q^\beta S_p$, ennélfogva valamennyi osztó összege:

$$S_p+qS_p+q^2S_p+\ldots+q^\beta S_p=S_p(1+q+q^2+\ldots+q^\beta)=S_pS_q,$$

ahol

$$S_q=\frac{q^{\beta+1}-1}{q-1}.$$

A $N=p^\alpha q^\beta r^\gamma$ szám összes pozitív osztóit úgy írhatjuk fel, hogy az (1) táblázat számait egy sorba írjuk, mindegyiknek alája írjuk r-szeresét, majd r^2-szeresét, …, r^γ-szorosát. Összegüket előbb soronként képezve, majd a sorösszegeket összeadva a fentiekhez hasonlóan nyerjük

$$\begin{aligned}&S_pS_q+rS_pS_q+r^2S_pS_q+\ldots+r^\gamma S_pS_q=\\&=S_pS_q(1+r+r^2+\ldots+r^\gamma)=S_pS_qS_r,\end{aligned}$$

ahol

$$S_r=1+r+r^2+\ldots+r^\gamma=\frac{r^{\gamma+1}-1}{r-1}.$$

Nyilvánvaló, hogy N és s^δ szorzatára nézve – ha s a p, q, r-től különböző törzsszám, és δ pozitív egész szám, – az osztók összege $S_pS_qS_rS_s$, ahol $S_s=1+s+s^2+\ldots+s^\delta=\dfrac{s^{\delta+1}-1}{s-1}$, és hasonlóan haladhatnánk tovább több prímszámhatvány szorzatára is.

Mármost $605=5\cdot 11^2$, és $637=7^2\cdot 13$, ennélfogva osztóik összege:
$(1+5)(1+11+11^2)=6\cdot 133=2\cdot 3\cdot 7\cdot 19$, ill.
$(1+7+7^2)(1+13)=57\cdot 14=3\cdot 19\cdot 2\cdot 7$, egyenlők.
Hasonlóan $99=3^2\cdot 11$ és $125=5^3$-ből
$(1+3+3^2)(1+11)=13\cdot 12=156=1+5+5^2+5^3$, végül
$8\,214\,000=2^4\cdot 3\cdot 5^3\cdot 37^2$ és $18\,396\,875=5^5\cdot 7\cdot 29^2$
osztóinak az összegét véve az egyes törzstényezők szóba jövő hatványainak összegét mindjárt törzsszámhatványok szorzataivá alakítva:
$31\cdot 4\cdot 156\cdot 1407=31\cdot 2^2\cdot 2^2\cdot 3\cdot 13\cdot 3\cdot 7\cdot 67$, ill.
$3906\cdot 8\cdot 871=2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 31\cdot 2^3\cdot 13\cdot 67$,
tehát mindkét megadott szám osztóinak az összege egyenlő $2^4\cdot 3^2\cdot 7\cdot 13\cdot 31\cdot 67$-tel. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

A fordított feladat céljára a fentiekből látjuk, hogy valamely természetes szám összes pozitív osztóinak S összege csak olyan szám lehet, amelyhez található vagy egyetlen p törzsszám és α kitevő úgy, hogy p hatványainak összege a 0-iktól az α-dikig összegül éppen az adott számot adja, vagy amely felbontható több ilyen, – de különböző törzsszámokhoz tartozó – számok szorzatára. Ezért az adott 72 és 399 számokra és minden osztójukra megoldjuk az

$$\text{(2)}\qquad 1+p+p^2+\ldots+p^\alpha=S$$

egyenletet.

Itt két ismeretlen van: p és α. Ezért célszerűen úgy járhatunk el, ha előbb az $\alpha=1,2$ értékeket megválasztva a kapott első-, ill. másodfokú egyenlet gyökeit vizsgáljuk végig, hogy megfelelnek-e p gyanánt, majd p-t és hozzá $\alpha\geq 3$-at választva képezzük (2) bal oldalát és megvizsgáljuk, melyik ilyen összeg szerepel az adott számok osztói között.

72-nek 2-nél nagyobb osztói

$$\text{(3)}\qquad d=3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12,\ 18,\ 24,\ 36,\ 72$$

(ugyanis $1 + p > 2$; egyébként emiatt $d = 36$ nem adhat megoldást). Innen $\alpha = 1$ kitevővel, vagyis az

$$1 + p = d$$

egyenletből a $p = 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 17,\ 23,\ 71$ törzsszámok jönnek szóba. Eszerint a 71 szám mindjárt megfelelő. Másrészt, pq alakú számokat keresve az $(1+p)(1+q) = 72$ egyenletből q-ra

$$\frac{72}{1+p} - 1 = 23,\ 17,\ 11,\ 8,\ 5,\ 3,\ 2$$

jön szóba; ezek a 8 kivételével prímek, tehát a

$$\begin{aligned} 72 &= 3 \cdot 24 = (1+2)(1+23), \\ &= 4 \cdot 18 = (1+3)(1+17), \\ &= 6 \cdot 12 = (1+5)(1+11) \end{aligned}$$

felbontásokból adódó $2 \cdot 23 = 46$, $3 \cdot 17 = 51$, $5 \cdot 11 = 55$ számok is megfelelnek. Hasonlóan az

$$(1+p)(1+q)(1+r) = 72$$

egyenletből $p = 2$ és $q = 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 17,\ 23$-mal r-re

$$\frac{72}{3(1+q)} - 1 = 5,\ 3,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{3},\ 0$$

jön szóba. Közülük csak $r = 5$, vagyis $pqr = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ ad megoldást. Feltehetjük, hogy $p < q < r$, így nyilvánvaló, hogy $p = 3$-mal hasonló megoldás már nincs, és hogy a keresett számnak négy- és többféle törzstényezője sem lehet.

Hasonlóan $399 = 400 - 1 = 20^2 - 1 = 3 \cdot 7 \cdot 19$ osztói:

$$d = 3,\ 7,\ 19,\ 21,\ 57,\ 133,\ 399; \tag{4}$$

valamennyi páratlan, ezért innen $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \ldots$-gyel nem kapunk megfelelő számot, mert $p > 2$ esetén $1 + p$ páros. Így $S = 399$-et adó számban $\alpha = 1$ kitevővel csak $p = 2$ szerepelhet.

$\alpha = 2$-vel az $1 + p + p^2 = d$ egyenlet pozitív gyöke

$$p = \frac{-1 + \sqrt{4d - 3}}{2}.$$

A (3)-beli osztókkal a diszkrimináns csak $d = 3$ esetében teljes négyzet, de innen $p = 1$, nem felel meg. A (4) értékekkel

$$\begin{aligned} &d = 3,\ 7,\ 21,\ 57,\ 133 - \text{ból} \\ &p = 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11, \end{aligned}$$

amiből $p = 2,\ 7$ és 11 törzsszám. Mivel $d = 7$ és 57 a 399-nek kapcsolt osztói (szorzatuk 399), azért a $p = 2$, $\alpha = 2$ és $q = 7$, $\beta = 2$-vel képezett $2^2 \cdot 72 = 196$ számra $S = 399$. Másrészt $p = 11$-gyel

$$\frac{399}{1 + 11 + 11^2} = 3 = 1 + 2,$$

tehát $2 \cdot 11^2 = 242$ ugyancsak megfelelő.

Az $\alpha \geq 3$ kitevők mellett 2^α osztóinak összege $2^{\alpha+1} - 1 = 15,\ 31,\ 63,\ 127,\ 255$, egyik sem szerepel (3) és (4)-ben. Hasonlóan $p = 3$-mal 40, 121 és 364, végül $p = 5$-tel 156 sem. Nagyobb törzsszámról nem lehet szó, mert már $1 + 7 + 7^2 + 7^3 = 400 > 399$.

Mindezek szerint az osztók összege gyanánt

$$\begin{aligned} &72 - \text{t a } 71, 46, 51, 55 \text{ és } 30, \\ &399 - \text{et pedig a } 196 \text{ és } 242 \end{aligned}$$

számok esetében kapunk.

Katona Mária (Budapest, Szilágyi Erzsébet lg. Gimn., III. o. t.)
Nagy Ernő (Budapest, József A. Gimn., III. o. t.)