a) $\operatorname{tg} x/2$-t mindvégig t-vel jelöljük. A keresett azonosságokat legegyszerűbben a kétszeres szög szögfüggvényeinek alapján nyerhetjük:

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \tag{3}$$

$$\sin^2 x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}. \tag{4}$$

A törteket egyszerűsítettük $\cos^2 x/2$-vel. Ezért a képletek minden x-re érvényesek, kivéve ha $\cos x/2=0$; ekkor $\operatorname{tg} x/2$ sincs értelmezve. (3) és (4) valóban racionális kifejezései t-nek.

b) (1)-nek egy megoldása A, B, C helyén J, K, L-lel az 1085. feladat I. megoldásában szerepel[1]. A megfelelő betűket beírva

$$\sin x=\frac{AC\pm B\sqrt{A^2+B^2-C^2}}{A^2+B^2}, \tag{5}$$

vagyis (1) bal oldalát kapjuk. Helyettesítsük másrészt (2)-be (3)-at és (4)-et. $1+t^2$-nel szorozva rendezés után

$$(B+C)t^2-2At+(C-B)=0.$$

Innen

$$t=\frac{A\pm\sqrt{A^2+B^2-C^2}}{B+C},$$
$$t^2=\frac{2A^2+B^2-C^2\pm 2A\sqrt{A^2+B^2-C^2}}{(B+C)^2},$$

tehát (4)-ből

$$\begin{aligned}\sin x&=\frac{2(B+C)(A\pm\sqrt{A^2+B^2-C^2})}{(B+C)^2+2A^2+B^2-C^2\pm 2A\sqrt{A^2+B^2-C^2}}=\\&=\frac{(B+C)(A\pm\sqrt{A^2+B^2-C^2})}{A^2+B^2+BC\pm A\sqrt{A^2+B^2-C^2}},\end{aligned} \tag{6}$$

az (1) jobb oldalán álló kifejezés.

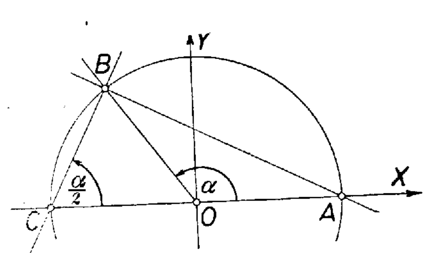
(5)-öt és (6)-ot külön utakon nyertük, ezért még meg kell vizsgálnunk, hogy pl. (6)-ban a két négyzetgyököt + jellel véve melyik jellel kell vennünk az (5)-beli négyzetgyököt. Ehhez elég egy numerikus próbát tennünk A, B, C olyan értékhármasával, amelyre $A^2+B^2-C^2\neq 0$. Legyen pl. $A=B=C=1$. Így (6) értéke 1, (5) értéke pedig a gyököt +, ill. − jellel véve 1, ill. 0. Eszerint a két kifejezés valóban akkor egyenlő, ha (5)-ben a gyököt + jellel vesszük.

Ujvári Erzsébet (Dombóvár, Gőgös I. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Többen (3)-hoz és (4)-hez a

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

képlet alapján jutottak el. Így azonban $\sin x$ esetében külön rá kell mutatni arra, hogy $\sin x$ és $\operatorname{tg} x/2$ előjele bármely x-re megegyező.



[1] K. M. L. 23 (1961) 131. o.

2. $180°$-nál kisebb abszolút értékű szögekre az első állítást az alábbiak szerint is beláthatjuk. Az α szöget ($0° < \alpha < 180°$) a szokásos módon a derékszögű koordinátarendszerbe illesztve legyen a nyugvó, ill. mozgó szárnak az egységkörön levő pontja A, B, és a $(-1,0)$ pont C. Ekkor $BCA\sphericalangle = \alpha/2$, tehát a CB és a rá merőleges AB egyenes iránytangense $\operatorname{tg}\alpha/2 = t$, ill. $-1/t$, másrészt B koordinátái $x = \cos\alpha$, $\gamma = \sin\alpha$. B-t a CB és AB egyenesek metszéspontjának tekintve koordinátái az

$$y = t(x+1), \qquad y = -\frac{1}{t}(x-1)$$

egyenletrendszerből (4), ill. (3)-nak adódnak. Azt, hogy x és y a t-vel racionálisan fejezhető ki, előre látjuk, hiszen t nem fordul elő gyökjel alatt, a rendszer elsőfokú, és minden elsőfokú egyenletrendszer megoldása – ha létezik – a négy alapművelettel kiszámítható.

Végül ábránkat az X tengelyre tükrözve meggondolásunk a $-180° < \alpha < 0°$ forgásokra is érvényesnek adódik.

Farkas Zoltán (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Gimn., III. o. t.)