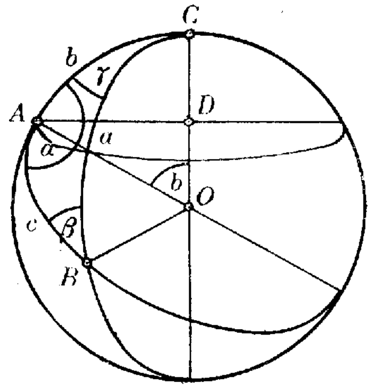
4°. Hasonlítsuk össze a sík- és gömbháromszögtan *sinus-tételét.* A gömb-háromszögtan sinus-tétele:

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$



Ha a síkháromszög oldalait és szögeit a megfelelő betűkkel jelöljük, akkor:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Hogy ezen két tételt megegyezésbe hozzuk, fogalmazzuk a sík-háromszögtan sinus-tételét más alakban.

Ha az ABC háromszöget az $AB = c$ oldal körül forgatjuk, akkor a $BC = a$ oldal C végpontja ugyanazon kört írja le, mint a $C_1C = m$ magasság C végpontja.

De

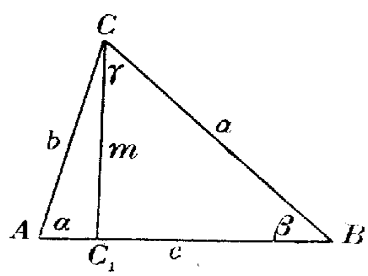
$$m = a\sin\beta \qquad \text{és} \qquad 2\pi m = 2\pi a\sin\beta.$$

Ha bevezetjük a következő jelölést:

$$\bigcirc\, m = 2\pi m,$$

akkor

$$\bigcirc\, m = \bigcirc\, a \cdot \sin\beta.$$



Hasonlóképpen

$$\bigcirc\, m = \bigcirc\, b \cdot \sin\alpha;$$

tehát

$$\bigcirc\, a : \bigcirc\, b = \sin\alpha : \sin\beta.$$

A sinus-tételt ennélfogva így is írhatjuk:

$$\bigcirc\, a : \bigcirc\, b : \bigcirc\, c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Most térjünk át a gömbi sinus-tételre. Szorozzuk meg a baloldalt 2π-vel. Ekkor

$$2\pi\sin a : 2\pi\sin b : 2\pi\sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Ha a gömb sugara az egység, akkor $COA\sphericalangle = b$.

Bocsássunk A-ból a CO-ra az AD merőlegest.

$$AD = \sin b.$$

Forgassuk a gömböt a CO tengely körül, akkor az A pont egy párhuzamos vagy szélességi kört ír le, melynek sugara: $AD = \sin b$.

Ugyanezen körnek gömbi sugara pedig b.

Tehát

$$2\pi\sin b = \bigcirc\, b,$$

hasonlóképpen

$$2\pi \sin a = \bigcirc\ a, \qquad 2\pi \sin c = \bigcirc\ c.$$

Ebből következik, hogy a gömbi sinus-tétel ilyen alakban formulázható:

$$\bigcirc\ a : \bigcirc\ b : \bigcirc\ a = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

vagyis a sík- és gömb-trigonometriai sinus-tétel ilyen átalakítás mellett egymással megegyezik.

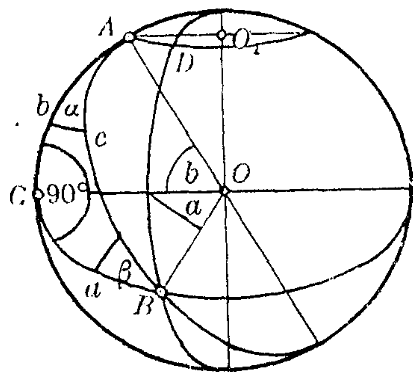
5°. Most térjünk át a sík- és gömb-trigonometria projekció-tételének összeegyeztetésére.

A projekció-télel a gömbön így szól:

$$\cos b \sin c = \cos c \sin b \cos\alpha + \sin a \cos\beta.$$

Vizsgáljuk meg, hogy milyen jelentése van a $\cos b$-nek és $\cos c$-nek.

Rajzoljunk az A-ból kis kört, melynek síkja merőleges az ACO síkra. A CBO sík is merőleges az ACO síkra, úgy hogy az ABC háromszög derékszögű: $\gamma = \frac{\pi}{2}$.



Messük a gömböt egy a BO-n átmenő s a CBO síkra merőleges síkkal, mely a legnagyobb kört vágja ki, hol D ezen körnek és az A-ból rajzolt körnek metszéspontja.

Világos, hogy: $COB\sphericalangle = AO_1D\sphericalangle = a$.

Határozzuk most meg az $\dfrac{\overset{\frown}{AD}}{\overset{\frown}{CB}}$ viszonyt.

A kis kör sugara

$$AO_1 = AO\cos b = r\cos b.$$

Tehát

$$\frac{\overset{\frown}{AD}}{\overset{\frown}{CB}} = \frac{r\cos b}{r} = \cos b.$$

Ebből láthatjuk, hogy egy tetszés szerinti általános gömbháromszög egyik oldalának cosinusa egyenlő az ezen oldal síkjára merőleges síkban fekvő kis kör ívdarabjának és az ezzel párhuzamos legnagyobb kör ugyanazon nyílású ívdarabjának a viszonyával, mely viszonyt a továbbiakban v_b akarjuk jelölni.

Tehát

$$v_b = \cos b;$$

éppen így:

$$v_c = \cos c, \qquad v_a = \cos a.$$

Ennélfogva az általános gömbháromszögre vonatkozó projekció-tételt így is írhatjuk:

$$v_b \sin c = v_c \sin b \cos\alpha + \sin a \cos\beta.$$

Ha $2r\pi$-vel szorzunk, akkor, mint a sinus-tételnél:

$$\bigcirc\ c \cdot v_b = \bigcirc\ b \cdot v_c \cos\alpha + \bigcirc\ a \cdot \cos\beta.$$

Hasonlóképpen kapjuk, hogy

$$\bigcirc\ a \cdot v_c = \bigcirc\ c \cdot v_a \cos\beta + \bigcirc\ b \cdot \cos\gamma.$$

$$\bigcirc\ b \cdot v_a = \bigcirc\ a \cdot v_b \cos\gamma + \bigcirc\ c \cdot \cos\alpha.$$

A síkban a projekció-tétel így szól:

$$c = b\cos\alpha + a\cos\beta$$

2π-vel szorozva:

$$\bigcirc\ c = \bigcirc\ b \cos\alpha + \bigcirc\ a \cos\beta.$$

Itt nem lép fel a v_b és v_c viszony. Ennek oka az, hogy a síkban CB és AD párhuzamos egyenesek, továbbá AC és BD az ezen egyenesekre merőleges egyenesek, s így

Ugyanezen oknál fogva :

$$v_a = v_c = 1.$$

Tehát a síkbeli projekció-tételt szintén írhatjuk ezen alakban:

$$\bigcirc\ c \cdot v_b = \bigcirc\ \cdot \cos v_c \cos\alpha + \bigcirc\ a \cdot \cos\beta,\ \text{stb.}$$

6°. Egyeztessük össze most azokat a képleteket a két geometriában, melyeket a félszögekre nyerünk, ha a háromszög három oldala van megadva.

Ismeretes, hogy

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}},$$

hol

$$2s = a + b + c.$$

Hogy e képleteket összeegyeztethessük a sík-geometria megfelelő képleteivel, szorozzuk meg a jobboldalak számlálóit és nevezőit $4r^2\pi^2$-tel, hol r a gömb sugara. Ekkor:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2r\pi \sin(s-b)\sin(s-c)}{2r\pi \sin b \cdot 2r\pi \sin c}},$$

vagyis:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\bigcirc\ (s-b) \bigcirc\ (s-c)}{\bigcirc\ b \cdot \bigcirc\ c}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\bigcirc\ s \cdot \bigcirc\ (s-a)}{\bigcirc\ b \cdot \bigcirc\ c}},$$

Hasonlóképpen járunk el a többi ilynemű képletekkel is.

A sík-geometriában az ezeknek megfelelő képletek a következők:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

A jobb oldalt mindenütt $4\pi^2$-tel szorozva és osztva, a következő alakban írhatjuk e formulákat:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\bigcirc\ (s-b) \bigcirc\ (s-c)}{\bigcirc\ b \cdot \bigcirc\ c}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\bigcirc\ s \cdot \bigcirc\ (s-a)}{\bigcirc\ b \cdot \bigcirc\ c}},$$

Látjuk, hogy ezen formulák is alakilag teljesen megegyeznek a két geometriában.