(I)

Ha összehasonlítjuk a sík- és gömbgeometria tételeit, azt találjuk, hogy némelyek teljesen megegyeznek a két geometriában, mások pedig nagyon hasonlók egymáshoz. A következőkben kimutatjuk, hogy e két geometria hasonló tételei a kellő fogalmazásban teljes megegyezésbe hozhatók.

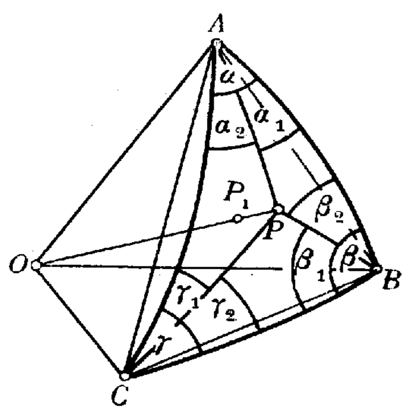
1°. Tudjuk, hogy a *gömbháromszöget* három legnagyobb kör határolja. Ha egység-sugarú gömböt veszünk alapul, akkor a gömbháromszög oldalainak mérőszámai ama testszöglet élszögeinek abszolut mérőszámai, melynek csúcsa a gömb középpontjában van, és melynek oldallapjai éppen a gömbháromszög három oldalát metszik ki. Ebből következik, hogy mindama tételek, melyek a háromélű testszöglet élszögeire érvényesek, helyesek a gömbháromszög oldalaira nézve is.

Tehát egyszerűen idézhetjük a következő ismert tételeket:

1. A gömbháromszög két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál.
2. Egyenlő oldalakkal egyenlő szögek feküsznek szemben és viszont.
3. Nagyobb oldallal nagyobb szög fekszik szemben.
4. A szögek összege nagyobb π-nél, de kisebb 3π-nél.

Ha ezen tételeket összehasonlítjuk a síkgeometria megfelelő tételeivel, akkor azt találjuk, hogy a 1. 2. és 3. tétel teljesen megegyezik a síkháromszög megfelelő tételével, míg a 4. nem egyezik meg, mert a háromszög szögeinek összege egyenlő π-vel. De ha a gömb sugara végtelen nagy lesz, akkor a gömbből sík, a gömbháromszögből síkháromszög lesz s ekkor a szögek összege: π.

Legyen ABC egy gömbháromszög. Fektessünk az A, B és C pontokon át síkot, mely a gömböt körben metszi. Ez a kör az ABC gömbháromszög köré írt kör. Határozzuk meg ennek a körnek a középpontját a gömbön.



Evégből bocsássunk a gömbnek O középpontjából merőlegest az ABC síkra. E merőleges a síkot P_1-ben, a gömböt P-ben döfi át. Az ABC síkháromszög köré írt kör középpontja: P_1. Kimutatjuk, hogy e körnek középpontja a gömbön: P. Ugyanis:

$$OAP_1 \cong OBP_1\Delta \cong OCP_1\Delta,$$

tehát

$$AOP_1\sphericalangle = BOP_1\sphericalangle = COP_1\sphericalangle$$

s így az ezen szögekkel szemközt fekvő ívek is egyenlők, vagyis

$$\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{BP} = \overset{\frown}{CP}.$$

Tehát P egyenlő távolságra van az A, B és C pontoktól s így P az ABC köré írt kör középpontja, s $\overset{\frown}{AP}$ ezen kör gömbi sugara. Ebből láthatjuk, hogy a gömbháromszög is éppen úgy bontható fel három egyenlőszárú gömbháromszögre, mint a síkháromszög három egyenlőszárú síkháromszögre.

Tegyük fel, hogy az A és B pontok szilárdak maradnak, de a C csúcs a köré írt kör kerületén mozog. Vajon állandó marad-e a C csúcsnál levő szög?

Legyenek a gömbháromszög szögei: α, β, γ; továbbá:

$$a_2 = CAP\sphericalangle = ACP\sphericalangle = \gamma_1; \qquad \gamma_2 = BCP\sphericalangle = CBP\sphericalangle = \beta_1;$$

$$\beta_2 = ABP\sphericalangle = BAP\sphericalangle = \alpha_1.$$

Ekkor:

$$\alpha + \beta - \gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 - \gamma_1 - \gamma_2, \qquad \alpha + \beta - \gamma = \alpha_1 + \beta_2 = 2\alpha_1$$

állandó, mert a C változásával az α_1 szög nem változik.

Itt azt látjuk, hogy ha a gömbháromszög egyik C csúcsa mozog, akkor nem változik az $\alpha + \beta - \gamma$ kifejezés.

A sík-geometriában a csúcsnál lévő szög állandó marad. De ha α', β', γ' egy síkháromszög szögei, akkor egyszersmind: $\alpha' + \beta' = \pi - \gamma'$ is állandó s így:

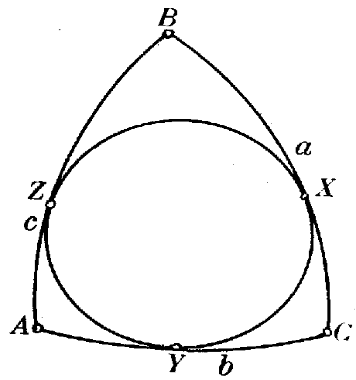
$$\alpha' + \beta' - \gamma' = \pi - 2\gamma' = \text{állandó}.$$

Tehát látjuk, hogy a sík-geometriában is érvényes az előbbi tétel.

Ez a tétel azért vezethető vissza a sík-geometriának ama tételére, hogy a csúcsnál levő szög állandó, mert itt tekintetbe vettük, hogy a szögek összege $= \pi$.

Hasonló tételt nyerünk akkor, ha a gömbháromszög egyik oldala változtatja helyzetét úgy, hogy a gömbháromszögbe írt kört folyton érintse.

Tegyük fel, hogy az ABC gömbháromszög $AB = c$ oldala úgy mozog, hogy a beírt kört mindig érinti.



Ekkor:

$$a + b - c = CX + BX + CY + AY - AZ - BZ.$$

De:

$$CX = CY; \; BX = BZ; \; AY = AZ,$$

mert az egy pontból húzott érintők egyenlők. Ennélfogva:

$$a + b - c = CX + CY = 2CX$$

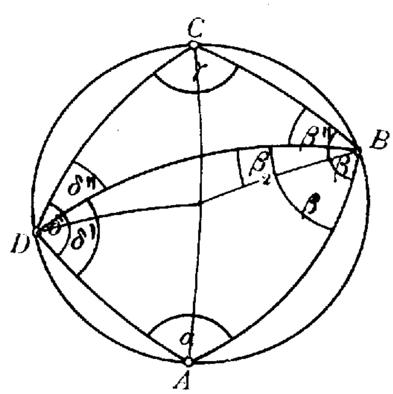
állandó, minthogy c helyzetváltozásával a CX nem változik. Ez a tétel a síkháromszögre is érvényes s a bizonyítása is ugyanaz.

2°. A *gömbi négyszöget* négy legnagyobb kör határolja.

Megvizsgáljuk, hogy a körbe és a kör köré írt négyszög szögeire, illetőleg oldalaira érvényesek-e a sík-geometriából ismert tételek.

Foglalkozzunk először a körbe írt gömbi négyszöggel.

Osszuk fel az $ABCD$ gömbi négyszöget a BD legnagyobb körrel két gömbháromszögre.



Ekkor felírhatjuk mindegyik gömbháromszögre a következő egyenletet:

$$\beta' + \delta' - \alpha = 2\beta_2; \qquad \beta'' + \delta'' - \gamma = -2\beta_2;$$

az utóbbi egyenlet jobb oldalát negatív jellel vesszük, mert a BCD háromszög köré írt kör középpontja a háromszögön kívül fekszik.

Adjuk össze e két egyenletet:

$$\beta' + \beta'' + \delta' + \delta'' - \alpha - \gamma = 0,$$

de

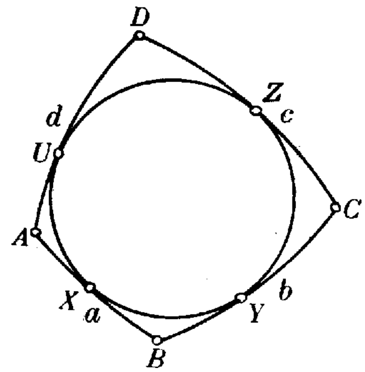
$$\beta' + \beta'' = \beta \qquad \text{és} \qquad \delta' + \delta'' = \delta,$$

tehát

$$\beta + \delta = \alpha + \gamma.$$

Ebből látjuk, hogy ha a gömbi négyszög körbe írható, akkor a szemben fekvő szögek összege egyenlő, éppen úgy mint a síknégyszögeknél. Csakhogy a gömbön ez az összeg nem egyenlő π-vel.

Hasonló tétel érvényes a kör köré írt gömbi négyszögre, csakhogy itt a szögek helyett az oldalak szerepelnek.



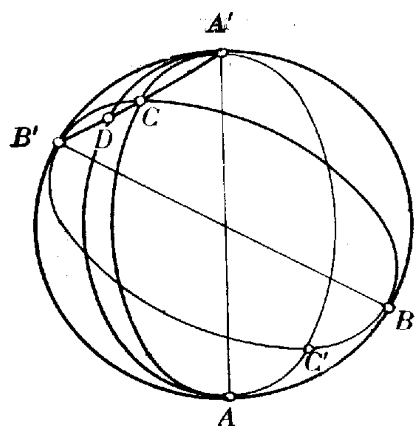
Ugyanis:

$$a + c = AX + BX + CZ + DZ =$$
$$= AU + BY + CY + DU = b + d.$$

Tehát a gömbi érintőnégyszögre is érvényes az ismert síkgeometriai tétel, hogy a szemközt fekvő oldalak összege egyenlő.

3°. A *Lexell-féle kör* az olyan kör, mely a gömbháromszög egyik csúcsán és a másik két csúcs ellenpontján megy keresztül.

Legyen ABC az adott gömbháromszög. Ha A és B ellenpontjai A' és B', akkor a Lexell-féle kör az A' B' és C pontokon megy át.



Legyen e kör gömbi átmérője $A'D$. Legyenek az ABC háromszög szögei $\alpha,\ \beta,\ \gamma$; az $A'B'C$ háromszög szögei $\alpha',\ \beta',\ \gamma'$. Ekkor $\alpha' = \pi - \alpha,\ \beta' = \pi - \beta,\ \gamma' =\ \gamma$. Ha C a Lexell-féle kör kerületén mozog, akkor:

$$\alpha' + \beta' - \gamma' = 2\alpha_1 = \text{állandó}.$$

De

$$\alpha' + \beta' - \gamma' = \pi - \alpha + \pi - \beta - \gamma =$$
$$= 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Vizsgáljuk meg ezen egyenlet geometriai értelmét.

Tudjuk, hogy a gömbháromszög területe:

$$T = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

De $2\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \text{állandó}$, s így állandó ez a kifejezés is:

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

amiből következik, hogy ha az ABC gömbháromszög C csúcsa a Lexell-féle körön mozog, akkor e háromszög területe állandó.

A Lexell-féle kör felhasználásával kereshetjük azt a háromszöget, melynek két oldala adva van és melynek területe a legnagyobb.

Legyen az ABE gömbháromszög AB és AE oldala állandó hosszúságú. Legyen az AB szilárd s forogjon AE az A pont körül. Kérdés, hogy az AE milyen helyzete mellett lesz az ABE háromszög területe a lehető legnagyobb?

Az ABE háromszög területe:

$$T = r^2(\alpha + \beta + \epsilon - \pi).$$

Szerkesszük meg az $A'B'E$ Lexell-féle kört. Akkor:

$$2\pi - \alpha - \beta - \epsilon = 2\alpha_1, \qquad \alpha + \beta + \epsilon - \pi = \pi - 2\alpha_1$$

T maximum, ha ezen egyenlet baloldala a legnagyobb, vagyis ha α_1 a legkisebb. Minthogy α_1 negatív nem lehet, azért $\alpha_1 = 0$ mellett lesz T maximum. Ekkor$E$ összeesik a Lexell-féle kör $A'D$ átmérőjének D végpontjával. Tehát annak a háromszögnek a területe a legnagyobb, melynek mozgó csúcsa a Lexell-féle kör A'-n keresztülmenő átmérőjének másik végpontjába esik.

Legyen ez a maximális területű háromszög ABD; hol: $AD = AE$.

Ekkor $A'B'D$ a Lexell-féle körbe írt háromszög, melynek $A'D$, oldala a kör átmérője. Tehát:

$$\alpha' + \delta - \beta' = 0;$$

vagyis:

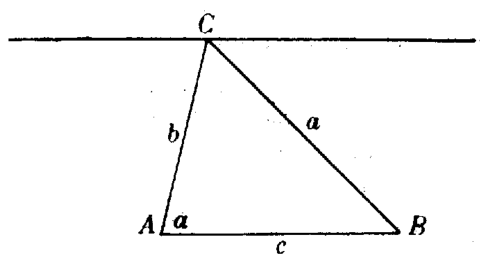
$$\pi - \alpha + \delta - \pi + \beta = \beta + \delta - \alpha = 0.$$

Ezen egyenlet pedig azt bizonyítja, hogy a maximális területű $A'B'D$ háromszög olyan, hogy a köré írt kör átmérője BD, vagyis a harmadik változó oldal.

Vizsgáljuk most meg, hogy milyen tételek felelnek meg ezeknek a síkon.

Tegyük fel, hogy a gömb sugara a végtelenig nő, de úgy hogy az ABC pontok a végesben maradjanak. Az A', B' pontok a végtelenbe jutnak.

A Lexell-féle kör az AB oldal folytatását azonban az A', B' pontokban metszi s így a Lexell-féle kör olyan egyenessé lesz a végtelen sugarú gömbön, vagyis a síkon, mely az AB egyenest a végtelenben metszi, miből következik, hogy a Lexell-féle körnek a síkon az AB-vel párhuzamos és a C csúcson átmenő egyenes felel meg. Világos, hogy ha C ezen a párhuzamos egyenesen mozog, akkor az ABC háromszög területe állandó marad.



Ha AB és AC állandó, akkor az ABC háromszög területe akkor lesz a legnagyobb, ha: $AB \perp AC$, vagyis, ha az ABC háromszög köré írt kör átmérője a harmadik változó oldal BC.