Egy P ponton átmenő 3 sugarat, melyek nem feküsznek egy síkban, a P pont 6 félsugárra osztja. Bármely ilyen 3 félsugár triédert alkot. A P pont a triéder csúcsa, a félsugarak a triéder élei. Két–két él meghatároz egy élszöget és a triéder egy lapját, két lap pedig egy lapszöget. Az élszögek és lapszögek a triéder alkotórészei.

Ha $a,\ b,\ c$ jelenti a triéder 3 élét, $a\sphericalangle,\ b\sphericalangle,\ c\sphericalangle$, az $a,\ b$, ill. c élekhez tartozó 3 lapszöget, $(ab)\sphericalangle = \gamma,\ (ac)\sphericalangle = \beta,\ (bc)\sphericalangle = \alpha$ a megfelelő 3 élszöget, akkor a térmértan ismert tételei szerint

(1) $$0 < \alpha + \beta + \gamma < 4R$$

(2) $$\alpha + \beta > \gamma,\ \alpha + \beta > \beta,\ \beta + \gamma > \alpha.$$

Minden triéderhez tartozik egy kiegészítő triéder, úgy, hogy

(3) $$a + \alpha_1 = 2R,\ b + \beta_1 = 2R,\ c + \gamma_1 = 2R$$

és

(4) $$\alpha + a_1 = 2R,\ \beta + b_1 = 2R,\ \gamma + c_1 = 2R$$

hol $a_1\ b_1\ c_1$, ill. $\alpha_1,\ \beta_1\ \gamma_1$ a kiegészítő triéder lapszögeit ill. élszögeit jelenti.

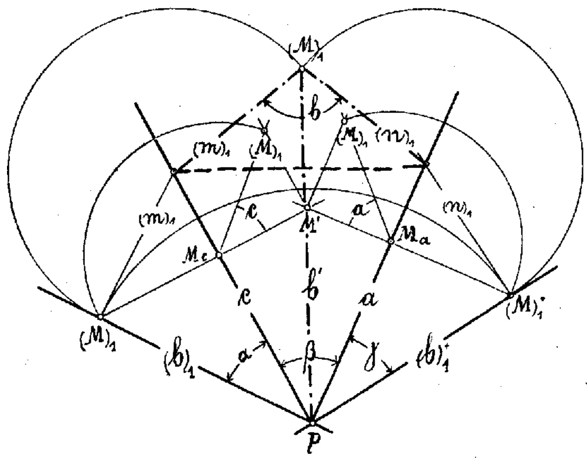
Az (1) és (4) ill. (2) és (4)-ből a lapszögekre a következő határokat kapjuk:

(5) $$2R < a_1 + b_1 + c_1 < 6R$$

hol természetesen az indexek el is hagyhatók.

A triéder meg van határozva, ha alkotórészeiből három ismeretes. Így tehát a következő 6 eset különböztethető meg a triéderek megoldásánál.

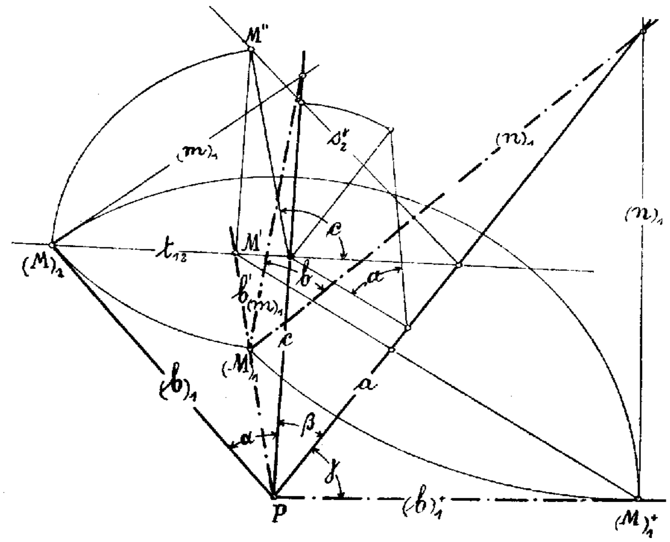
(1). Ismeretes a három élszög: $\alpha,\ \beta,\ \gamma$; meghatározandó $a,\ b, c$ lapszög. Rajzoljuk egymás mellé a három élszöget. A két szélső élszöget ilyenkor úgy tekinthetjük, mintha le volnának forgatva a β síkjába az a ill. a c él körül. A b él tehát kétszer van leforgatva, egyszer a γ síkjával az a él körül, másodszor pedig az α síkjával a c él körül.



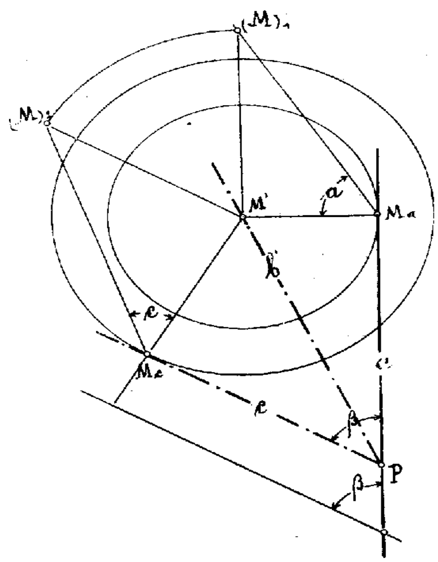
Válasszunk a kétszeresen leforgatott b élen egy tetszőleges M pontot, ill. ennek lefordításait $(M)_1$ és $(M)_1^+$, és állítsuk elő M-nek képét a β síkon. M képe az $(M)_1$-ből c-re és $(M)_1^+$-ből a-ra bocsátott merőlegesek metszőpontjában lesz. Ezek után, mint ismeretes, a $c\sphericalangle$-et az $\overline{M'M_c}$ befogóból és $\overline{M_c(M_1)}$ átfogóból szerkesztett derékszögű háromszögnek $\overline{M_1M_c}$ befogó mellett fekvő hegyes szöge adja. Épp így határozhatjuk meg az $\overline{M'M_a}$ és $\overline{M_a(M)_1^+}$ távolságok segélyével az a lapszöget. Hátra van még a b szög meghatározása. Ha tekintetbe vesszük, hogy a $b\sphericalangle$-et az α ill. γ síkban fekvő és a b élre merőleges $m,\ n$ egyenesek metszik ki, akkor ezeknek leforgatásait megkapjuk, ha $(M)_1$-ben $(b)_1$-re, ill. $(M)_1^+$-ben $(b)_1^+$-re merőlegest állítunk. Most már könnyen meghatározható az (mn) síknak nyomvonala és ezzel az $m,\ n$ egyenesek alkotta b szög valódi nagysága.

(2). Ismeretes két élszög: $\alpha,\ \beta$ és az általuk bezárt lapszög. c él körül β síkjába forgatjuk az ismert α élszöget és a (b_1)-en tetszőlegesen választott $(M)_1$ pontnak c lapszög segítségével meghatározzuk M' képét; a P pontból, mint középpontból, $P(M)_1$ távolsággal húzott körívnek és M'-ből a élre bocsátott merőlegesnek metszőpontja adja $(M)_1^+$-t. A további eljárás megegyezik az ismertetett elvekkel.

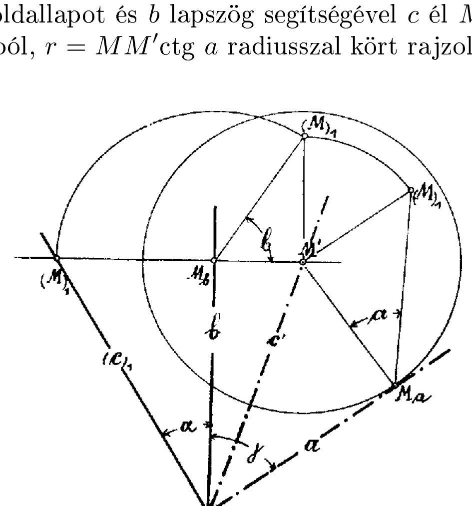
(3). Ismeretes két élszög: α és β és a nagyobbikkal átellenes lapszög a. β síkjába forgatjuk α-t és c élre merőleges segédképsíkot választunk, melyet 2-ik képsíknak fogunk tekinteni. Az ismert a lapszög segítségével meghatározzuk a γ sík második nyomvonalát és az α síknak c él mint első nyomvonal körül való felállításával meghatározhatjuk b él második nyompontját és ezzel b-nek első és második képét. Ezek után a többi alkotórészek meghatározása nem ütközik nehézségbe.



(4). Ismeretes két lapszög: a és c és ezen élek által bezárt β élszög; meghatározandók a többi alkotórészek. A b élen tetszőlegesen választott M pontnak M' vetületéből, mint középpontból, $r_1 = \overline{MM'}\mathrm{ctg}\ a$ és $r_2 = \overline{MM'}\mathrm{ctg}\ c$ radiusszal két koncentrikus kört rajzolunk. Az r_1 sugarú körhöz vont érintő lesz a triéder a éle; a élt adott β szög alatt metsző és r_2 sugarú kört érintő egyenes lesz a c él. Az a, c élek metszőpontja meghatározza a triéder P csúcsát.



(5). Ismeretes két lapszög: a és b és az egyikkel szemben fekvő α élszög; meghatározandó a triéder többi alkotórésze. γ síkjába b él körül leforgatjuk az a oldallapot és b lapszög segítségével c él M pontjának meghatározzuk a képét a γ síkon, M' pontból, mint középpontból, $r = MM'\mathrm{ctg}\ a$ radiusszal kört rajzolunk; P pontból e körhöz vont érintője adja az a élt.



(6). Ismeretes a három lapszög; meghatározandó a triéder három élszöge. E feladat a kiegészítő triéder segítségével az (1)-ben ismertetett elvek alapján oldható meg, mit az olvasóra bízok.

A most tárgyalt feladatoknak bizonyos esetekben két megoldásuk van, de ezek fejtegetésére a jelen alkalommal nem szándékozom kiterjeszkedni.

Triéder megoldások körébe számos példa tartozik; ezek közül nehányat gyakorlásul közlök:

XCIV. Adva van két sík első nyomvonala: s_1', s_1^2; és azon két szög, melyet a két sík metsző egyenese s_1' ill. s_1^2-vel alkot; meghatározandó a két sík második nyomvonala.

XCV. Adva van egy egyenes körkúp; tengelye merőleges az első képsíkra és egy L pont; meghatározandó az L-en átmenő két érintősík (φ) hajlásszöge.

XCVI. Adva van g és l torzegyenespár; meghatározandó azon transzverzális, mely g-vel α, l-el β szögöt zár be.

XCVII. Adva van g általános helyzetű egyenes és kívüle P pont; meghatározandó azon t egyenes, mely t_{12}-vel és g-vel adott szögeket zár be.

XCVIII. Adva van egy sík; meghatározandó e síkban oly l egyenes, mely egy az első képsíkban fekvő g egyenest adott α szögben metsz.

XCIX. Adva van az első felező síkban fekvő P pont; meghatározandó a P-n átmenő s sík úgy, hogy első képsíkszöge α és első és második nyomvonala által képezett szöge β legyen.

Petrozsény.