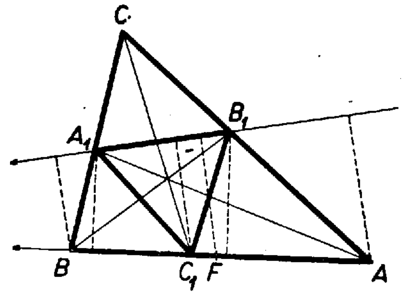


I. megoldás. A 871. feladatban[1] az AC_1, C_1B, $\ldots$, B_1A szakaszokat, majd az α, β, γ szögek szinuszát kifejeztük az ABC háromszög a, b, c oldalaival és t területével. Ezekkel felírtuk az AB_1C_1, BC_1A_1 és CA_1B_1 háromszögek területét. Végül ezek összegének t-ből való levonásával azt találtuk, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög t_1 területe:

$$t_1 = t\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Eszerint azt kell igazolnunk, hogy

$$\frac{t_1}{t} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{1}{4}. \tag{1}$$

a, b, c pozitív számok, ezért a két pozitív szám számtani és mértani közepének ismert nagyságviszonya szerint

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \quad \text{másképpen} \quad \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \leq \frac{1}{2}.$$

Hasonlóan

$$\frac{\sqrt{bc}}{b+c} \leq \frac{1}{2}, \qquad \frac{\sqrt{ca}}{c+a} \leq \frac{1}{2},$$

és az egyenlőségi jel csak akkor érvényes, ha a megfelelő két szám egyenlő. E három egyenlőtlenség szorzatát 2-vel szorozva éppen az (1)-beli egyenlőtlenséget kapjuk.

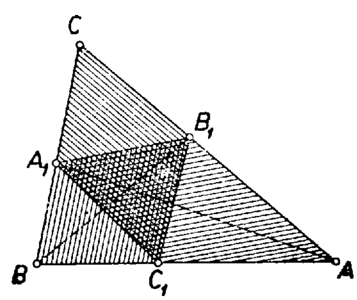
Ezzel az állítást igazoltuk. Egyenlőség csak $a=b=c$ mellett, tehát szabályos háromszög esetében áll fenn.

Szőts Miklós (Budapest, Corvin Mátyás g. IV. o. t.)

II. megoldás. Tegyük fel, hogy $a \leq b$ és jelöljük az AB oldal felezőpontját F-fel. Ekkor

$$BC_1 = \frac{a}{a+b}\cdot c \leq \frac{b}{a+b}\cdot c = C_1A,$$

tehát C_1 vagy a BF szakaszon van, vagy egybeesik F-fel.



Legyen a C-ből húzott magasság m. Ezzel A_1 és B_1-nek AB-től való d_a, d_b távolságára

$$d_a = \frac{BA_1}{BC}\cdot m = \frac{cm}{b+c}, \qquad d_b = \frac{AB_1}{AC}\cdot m = \frac{cm}{a+c},$$

tehát $d_a \leq d_b$. Ezért az A_1B_1 egyenes AB-t a B-n túli meghosszabbításán metszi, vagy párhuzamos vele. Ezek szerint C_1 nem lehet távolabb az A_1B_1 egyenestől, mint F, így a közös A_1B_1 alapú $A_1B_1C_1$ és A_1B_1F háromszögek területére – a területeket ugyanúgy jelölve, mint magukat a háromszögeket –:

$$A_1B_1C_1 \leq A_1B_1F. \tag{2}$$

[1]K. M. L. 17 (1958) 7. o.

F-nek A_1B_1-től való távolsága egyenlő A és B ugyancsak A_1B_1-től mért távolságainak számtani közepével, ezért

$$2A_1B_1F = A_1B_1A + A_1B_1B. \tag{3}$$

Most már (2) és (3)-ból:

$$2A_1B_1C_1 = 2t_1 \leq A_1B_1A + A_1B_1B. \tag{4}$$

Eredményünk az $a \leq b$ feltevéstől függetlenül érvényes, mert benne az A és B pontok egyenlő szerepet játszanak. Ezért hasonlóan

$$2t_1 \leq B_1C_1B + B_1C_1C,$$
$$2t_1 \leq C_1A_1C + C_1A_1A.$$

Ezeket (4)-gyel összeadva a bal oldalon $6t_1$ áll. A jobb oldali 6 háromszög a bennük előforduló azonos szögfelezőszakaszok szerinti párokban összeillesztve 3 négyszöget fed le (2. ábra). Ezeket másik átlójuk mentén kettévágva a részek 3-szor fedik le az $A_1B_1C_1$ háromszöget, és egyszer-egyszer az AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 háromszögeket. Tehát a jobb oldali háromszögekkel az ABC háromszög egyszer, az $A_1B_1C_1$ pedig további 2-szer van lefedve:

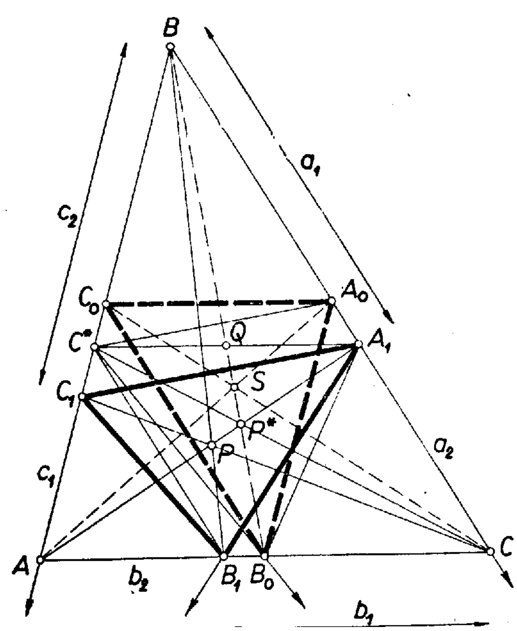
$$\begin{gathered}(AA_1B_1 + AA_1C_1) + (BB_1C_1 + BB_1A_1) + (CC_1A_1 + CC_1B_1) = AB_1A_1C_1 + \\ + BC_1B_1A_1 + CA_1C_1B_1 = AB_1C_1 + A_1B_1C_1 + BC_1A_1 + CA_1B_1 + 2A_1B_1C_1 = \\ = ABC + 2A_1B_1C_1.\end{gathered}$$

Eszerint $6t_1 \leq t + 2t_1$, vagyis $4t_1 \leq t$. Ezt kellett bizonyítanunk.

Egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha mindegyik szögfelező a szemben fekvő oldalt a felezőpontjában metszi, vagyis ha az eredeti háromszög szabályos.

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)
Juhász István (Budapest, Madách I. g. IV. o. t.) és
Nováky Béla (Budapest, I. István g. III. o. t.) dolgozatából

III. megoldás. Bebizonyítjuk a következő általános tételt: *Ha A_1, B_1, C_1 az ABC háromszög BC, CA, AB oldalának belső pontja, és az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok egy pontban metszik egymást, akkor az $A_1B_1C_1$ háromszög területe nem nagyobb az ABC háromszög területének 4-edrészénél.*



Legyen $AC_1 = c_1$, $C_1B = c_2$, $BA_1 = a_1$, $A_1C = a_2$, $CB_1 = b_1$, $B_1A = b_2$. Ekkor a területek fenti jelölésével

$$ABC = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)(c_1 + c_2)\sin\alpha, \qquad AB_1C_1 = \frac{1}{2}b_2c_1\sin\alpha,$$

tehát

$$AB_1C_1 = \frac{b_2c_1}{(b_1 + b_2)(c_1 + c_2)} \cdot ABC.$$

Hasonló összefüggést írhatunk fel BC_1A_1 és CA_1B_1-re. Ezekkel

$$A_1B_1C_1 = ABC - AB_1C_1 - BC_1A_1 - CA_1B_1 =$$
$$= ABC\left[1 - \frac{b_2c_1}{(b_1+b_2)(c_1+c_2)} - \frac{c_2a_1}{(c_1+c_2)(a_1+a_2)} - \frac{a_2b_1}{(a_1+a_2)(b_1+b_2)}\right] =$$
$$= ABC\cdot\frac{a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2}{(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)},$$

ennélfogva állításunk a következő:

$$\frac{a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2}{(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)} \le \frac{1}{4}.$$

Ceva tétele szerint $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$, ezért a számláló így alakítható:

$$a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 = 2a_1b_1c_1 = 2\sqrt{a_1^2b_1^2c_1^2} = 2\sqrt{a_1a_2b_1b_2c_1c_2}.$$

Most már az állítás átrendezésével adódó

$$\frac{\sqrt{a_1a_2}}{\dfrac{a_1+a_2}{2}}\cdot\frac{\sqrt{b_1b_2}}{\dfrac{b_1+b_2}{2}}\cdot\frac{\sqrt{c_1c_2}}{\dfrac{c_1+c_2}{2}} \le 1$$

egyenlőtlenségről a számtani és mértani közép nagyságviszonyára már idézett tétel alapján nyilvánvaló, hogy helyes. Átalakításaink fordítva is érvényesek, ezért az állítás helyes.

Eredményünk érvényes az eredeti feladatra, mert a szögfelezők egy pontban metszik egymást. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Molnár Emil (Győr, Révai M. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az állítást így is kimondhatjuk: ha A_1, B_1, C_1 a BC, CA, AB oldal olyan belső pontja, amelyre $BA_1 : A_1C = k : l$, $CB_1 : B_1A = l : m$, és $AC_1 : C_1B = m : k$, akkor az $A_1B_1C_1\triangle$ területe legfeljebb 4-edrésze az $ABC\triangle$ területének.

Juhász István (Budapest, Madách I. g. IV. o. t.)

2. A felhasznált általános tétel számítás nélkül is bizonyítható. Legyen az AB, BC, CA oldalak felezőpontja C_0, A_0, B_0, a háromszög súlypontja S. A súlyvonalak 6 résztháromszögre bontják a háromszöget. Tegyük fel, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek P metszéspontja az ASB_0 részháromszögben van (ez a betűzés alkalmas választásával elérhető).

Így A_1 a CA_0 szakaszon, B_1 pedig az AB_0 szakaszon van. Ha egybeesnek A_0 ill. B_0-lal, akkor P azonos S-sel, tehát C_1 is C_0-lal és az $A_0B_0C_0$ háromszög területe az ABC háromszögének negyedrésze. Ha A_1 és B_1 közül legalább az egyik különbözik a megfelelő oldal felezőpontjától, akkor az A_1B_1 egyenes az AB oldal A-n túli meghosszabbítását metszi, így ha C_1-et távolítjuk az AB oldal mentén A-tól (A_1-et és B_1-et változatlanul hagyva, tehát nem ügyelve arra, hogy AA_1, BB_1, CC_1 továbbra is egy ponton menjen keresztül), akkor az A_1B_1 egyenestől való távolsága növekszik.

Legyen C^* az A_1-en át AC-vel párhuzamosan húzott egyenes metszéspontja az AB oldallal. Megmutatjuk, hogy az AC^*A_1C trapéz AA_1 és CC^* átlóinak P^* metszéspontja a BB_0 súlyvonalra esik. BB_0 felezi az A_1C^* szakaszt. Legyen a metszéspontjuk Q. Ekkor AB_0P^* és A_1QP^* hasonló háromszögek (megfelelő szögeik egyenlők), s így $AP^*/A_1P^* = AB_0/A_1Q = (AC/2)/(A_1C^*/2) = AC/A_1C^*$. De tudjuk (az AP^*C és $A_1P^*C^*$ háromszögek hasonlóságából), hogy ugyanilyen arányban osztja AA_1-et a CC^* átlóval való metszéspont is, tehát CC^* a P^* pontban, s így a BB_0 súlyvonalon metszi AA_1-et, – és ezt állítottuk.

Most már közbeiktatott háromszögek felhasználásával összehasonlíthatjuk az $A_1B_1C_1$ és $A_0B_0C_0$ háromszögek területét. Ha P^* azonos P-vel, akkor C^* azonos C_1-gyel, s így az $A_1B_1C^*$ háromszög ugyanaz, mint $A_1B_1C_1$. Ha P^* a PA_1 szakasz belsejében van, akkor egyszersmind a BCC_1 háromszögben van, s így C^* a C_1B szakaszhoz tartozik, tehát messzebb van A-tól, mint C_1, s így az A_1B_1-től való távolsága nagyobb, mint C_1-é; ennek folytán az $A_1B_1C_1$ háromszög területe kisebb, mint $A_1B_1C^*$-é, az utóbbi pedig megegyezik az $A_1B_0C^*$ háromszögével, mert A_1C^* párhuzamos AC-vel.

Ez a háromszög egybe eshet $A_0B_0C_0$-lal (ha P az AS szakaszon s így A_1 az A_0 pontban van). Ha különbözik tőle, akkor A_1 a CA_0 szakasz belsejében van, s így C^* az AC_0 szakasz belsejében. Ekkor C^*B_0 a BC oldal C-n túli meghosszabbítását metszi, így A_1 közelebb van C^*B_0-hoz, mint A_0. Így – a háromszögek területét ugyanúgy jelölve, mint a háromszögeket magukat – azt nyertük (tekintettel arra is, hogy $A_0B_0 \parallel AB$), hogy

$$A_1B_1C_1 \le A_1B_1C^* = A_1B_0C^* \le A_0B_0C^* = A_0B_0C_0 = \frac{1}{4}ABC.$$

Ezzel állításunkat igazoltuk. Az első lépésben csak akkor nem nagyobbítunk, ha P a BB_0 súlyvonalon van, a harmadikban pedig akkor, ha P az AA_0 súlyvonalon is van, tehát egyenlőség csak akkor állhat, ha P a háromszög súlypontja, és ekkor valóban az egyenlőségjel érvényes.