

**I. megoldás.** Írjuk a nevezőket törzsszám-szorzat alakjában és hozzuk közös nevezőre a kifejezést:

$$\frac{3^{2n}}{2^4 \cdot 7} - \frac{4^{2n}}{3^2 \cdot 7} + \frac{5^{2n}}{2^4 \cdot 3^2} = -\frac{9 \cdot 3^{2n} - 16 \cdot 4^{2n} + 7 \cdot 5^{2n}}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7}.$$

Eszerint elég azt megmutatnunk, hogy a számláló osztható  $2^4$ -nel,  $3^2$ -nel és  $7$ -tel, – ezek ugyanis egymáshoz relatív prímelek. Ehhez átalakítjuk a számlálót és felhasználjuk azt az ismert tételt, hogy ha  $a, b$  egész számok és  $n$  természetes szám, akkor  $a^n - b^n$  osztható  $a - b$ -vel:  $a^n - b^n = (a - b)M$ , ahol  $M$  egész szám. Így a számláló egyrészt

$$\begin{aligned} (16 - 7)3^{2n} + 7 \cdot 5^{2n} - 16 \cdot 4^{2n} &= 7(25^n - 9^n) - 16(16^n - 9^n) = \\ &= 7(25 - 9)M_1 - 16(16 - 9)M_2 = 16 \cdot 7(M_1 - M_2) = 2^4 \cdot 7 \cdot M_3, \quad - \text{másképp} \\ 9 \cdot 3^{2n} - (9 + 7)4^{2n} + 7 \cdot 5^{2n} &= 9(3^{2n} - 4^{2n}) + 7(25^n - 16^n) = 9M_4 + \\ &+ 7(25 - 16)M_5 = 9(M_4 + 7M_5) = 3^2 M_6. \end{aligned}$$

Ha pedig  $n = 0$ , akkor a kifejezés értéke  $0$ , egész szám. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

*Fukker Gábor* (Győr, Czuczor G. g. IV. o. t.)

*Megjegyzések.* 1. A fenti oszthatóság  $n \geq 1$  esetére az  $(a^n - b^n) : (a - b)$  osztás

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

hányadosának kiírásával egyetlen átalakításban mutatható meg. A számláló

$$\begin{aligned} 9 \cdot 9^n - 9 \cdot 16^n - 7 \cdot 16^n + 7 \cdot 25^n &= 9 \cdot 7 \left( \frac{25^n - 16^n}{9} - \frac{16^n - 9^n}{7} \right) = \\ &= 9 \cdot 7 [(25^{n-1} + 25^{n-2} \cdot 16 + \dots + 16^{n-1}) - (16^{n-1} + 16^{n-2} \cdot 9 + \dots + 9^{n-1})]. \end{aligned}$$

A szögletes zárójel minden közbülső tagja osztható  $16$ -tal, ugyanígy az első és utolsó tag különbsége is.

*Náray Szabó Gábor* (Budapest, József A. g. IV. o. t.)

2. Többen kongruenciák felhasználásával bizonyították az állítást.

**II. megoldás.** Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk.  $n = 0$ -ra és  $n = 1$ -re a kifejezés értéke  $0$ , egész szám, az állítás igaz. Feltesszük, hogy

$$k > 0, \quad \text{egész és} \quad N_k = \frac{3^{2k}}{112} - \frac{4^{2k}}{63} + \frac{5^{2k}}{144} \quad \text{egész,}$$

és megmutatjuk, hogy  $N_{k+1}$  ugyancsak egész. Valóban

$$\begin{aligned} N_{k+1} &= \frac{3^{2(k+1)}}{112} - \frac{4^{2(k+1)}}{63} + \frac{5^{2(k+1)}}{144} = \frac{9 \cdot 3^{2k}}{112} - \frac{16 \cdot 4^{2k}}{63} + \frac{25 \cdot 5^{2k}}{144} = \\ &= 9 \left( \frac{3^{2k}}{112} - \frac{4^{2k}}{63} + \frac{5^{2k}}{144} \right) + \frac{16 \cdot 5^{2k}}{144} - \frac{7 \cdot 4^{2k}}{63} = 9N_k + \frac{5^{2k} - 4^{2k}}{9} = \\ &= 9N_k + \frac{25^k - 16^k}{25 - 16}, \end{aligned}$$

és az utolsó alak második tagja a fentiek szerint egész szám.

*Zalay Miklós* (Budapest, XVIII. Hengsorsor úti ált. g. III. o. t.)