I. megoldás. Írjuk n-et $n = 13a + b$ alakban, ahol a és b egészek, $0 \leq b \leq 12$. Így

$$K = 169a^2 + 13a(2b + 7) + b^2 + 7b - 4$$

akkor és csak akkor osztható 13-mal, ha $b^2 + 7b - 4$ osztható vele. b értékeinek behelyettesítése mutatja, hogy az oszthatóság csak $b = 3$ mellett áll fenn. Mármost $b = 3$-mal

$$K = 169a^2 + 169a + 26 = 169a(a + 1) + 26$$

és innen látjuk, hogy K semmilyen egész a mellett sem osztható 169-cel.

Konkoly Károly (Budapest, Széchenyi I. g. III. o. t.)

II. megoldás. A „169" szám négyzetszám: 13^2, ezért célszerű lesz kiegészíteni az adott K kifejezésben az n-et tartalmazó tagokat teljes négyzetté. Kényelmesebb ezt $4K$-val végezni el. Ha ez nem osztható 169-cel, akkor K sem.

$$4K = 4n^2 + 28n - 16 = (2n + 7)^2 - 65.$$

Ha volna olyan n, amely mellett $4K$ osztható volna 169-cel, akkor 13-mal is osztható volna. $4K$ második tagja, -65 osztható 13-mal, azért $4K$ azokra és csak azokra az n-ekre osztható 13-mal, amelyekre $(2n + 7)^2$ osztható vele. Mivel pedig 13 törzsszám, azért $(2n + 7)^2$ akkor és csak akkor osztható 13-mal, ha $2n + 7$ osztható vele. Ilyenkor a $(2n + 7)^2$ tag 169-cel osztható, a -65 tag viszont nem osztható 169-cel, ezért $4K$ valóban egyetlen egész n mellett sem osztható 169-cel, s így K sem.

Megjegyzés. Számos megoldás más módokon alakította K-t, de semmivel nem indokolta, miért éppen a kérdéses alakítást használta. Ilyenek:

$K = (n + 10)(n - 3) + 26$ –, (a két tényező ugyanazon n mellett osztható 13-ma1, mert különbségük 13).

$K = (n - 3)^2 + 13(n - 1)$ –, (itt $n - 1 = 13k$ esetén a második tag 169-cel osztható, viszont $n - 3 = 13k - 2$ nem osztható vele; ha pedig $n - 3 = 13k$ és így $(n - 3)^2 = 169k^2$, akkor $13(n - 1)$ csak 13-mal osztható.

Az előbbi alak olyan c, d, e egész számok meghatározását kívánja, amelyekkel $(n + c)(n + d) + e = n^2 + 7n - 4$, tehát $c + d = 7$, másrészt $c - d = 13$. Így adódott $c = 10$, $d = -3$ és $e = 26$.

III. megoldás. A feladat állításával egyenértékű a következő: ha K osztható 169-cel, akkor n nem egész szám. Tegyük fel, hogy valamely k egész számmal teljesül

$$n^2 + 7n - 4 = 169k, \quad \text{és így} \quad n^2 + 7n - (169k + 4) = 0.$$

A diszkrimináns

$$D = 49 + 4(169k + 4) = 13(4 \cdot 13k + 5).$$

osztható 13-mal, de 13^2-nel nem, tehát nem lehet teljes négyzet. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Cserháti Miklós (Budapest, Petőfi S. g. IV. o. t.)