Érdekes kis könyvecske jelent meg Mikola Sándor, lapunk munkatársának tollából. A könyvecske számos érdekes, mulatságos és szórakoztató mathematikai problémát és feladatot tartalmaz, könnyen érthető, népszerű modorban megírva. Rég éreztük az ily .irányú munka hiányát s azért örömmel fogadjuk megjelenését. A munka – melyet olvasóink figyelmébe ajánlunk – két füzetben jelent meg a Stampfel-féle tudományos zsebkönyvtárban. Egy– egy füzet ára 60 fillér.

Mutatványul közöljük az első füzetből a következő cikket:

Phoenix-számok.

Az ókori mythologia phoenix madara elégve, saját porából új életre kél. Lehetetlen őt megsemmisíteni. Egy szellemes tárczaíró bizonyos számokat phoenix-számoknak nevezett el, mert azzal a csodálatos tulajdonsággal bírnak, hogy bizonyos műveletek elvégzése után is ugyanabban az alakban jelennek meg, a melyikben azelőtt voltak.

Az ilyen számok ős typusa a 0; szorozhatjuk vagy oszthatjuk bármilyen véges számmal: az eredmény megint csak 0.

Azok a számok, melyekről itt szólni kívánunk, bizonyos tekintetben hasonló tulajdonságúak.

Ilyen mindenekelőtt a következő hatjegyű szám: 142857. Ha ezt megszorozzuk, akkor oly számokat kapunk, melyekben ugyanazok a jegyek ugyanabban a sorrendben fordulnak elő, csak a kezdet más és más. Itt következik a táblázat:

$$142.857 \times 1 = 142.857;$$

$$142.857 \times 2 = 285.714;$$

$$142.857 \times 3 = 428.571;$$

$$142.857 \times 4 = 571.428;$$

$$142.857 \times 5 = 714.285;$$

$$142.857 \times 6 = 857.142.$$

Úgy kell képzelni, hogy az 1, 4, 2, 8, 5, 7 jegyek valamely kör kerületén vannak egyenletesen eloszolva: akkor az eredeti szám egymásra következő többszöröseit úgy kapjuk meg, ha mindig más és más számnál kezdjük a kör körüljárását. Nagyobb számokkal szorozva kapjuk:

$$\left.\begin{array}{rrr} 142.857\times & 7 = & 999.999 \\ 142.857\times & 8 = & 1.142856 \\ 142.857\times & 9 = & 1.285.713 \\ 142.857\times & 10 = & 1.428.570 \\ 142.857\times & 11 = & 1.571.427 \\ 142.857\times & 12 = & 1.714.284 \end{array}\right. \text{stb.}$$

Ha 7-tel szorzunk, csupa 9-ből álló számot kapunk; ha 7-nél nagyobb számmal szorzunk, akkor már hétjegyű szorzathoz jutunk. De az előbb említett nevezetes tulajdonság most is jelentkezik; csak a hat utolsó jegy előtt lévő számot le kell vágnunk és a végéhez hozzáadnunk, hogy újból az eredeti számjegyeket kapjuk. Így az előbbi táblázat szerint a 12-szeresében, el kell venni az 1-et és a végéhez hozzáadni, hogy 714.285-öt nyerjük. Ugyanezt tapasztaljuk a nagyobb számokkal való szorzásnál is:

$$142.857 \times 115 = 16.428.555.$$

Ha ebből a hat utolsó jegy előtt lévő 16-ot elvesszük és a végéhez hozzáadjuk,

$$\begin{array}{r} 428.555 \\ +16 \\ \hline 428.571 \end{array}$$

ismét az eredeti jegyekkel és eredeti sorrendben írt számot kaptunk.

Csak egy kivétel van; nevezetesen ha 7 többszöröseivel szorzunk, akkor a megelőző szabály szemmel tartásával csupa 9-essel írott számot kapunk.– Szorozzunk pl. 126-tal, a mely szám 7×18.

$$142.857 \times 126 = 17.999.982.$$

Itt ismét

$$\begin{array}{r} 999.982 \\ +17 \\ \hline 999.999. \end{array}$$

Hasonló tulajdonságú a következő szám is

$$0.588.235.294.117.647.$$

Az elejére odaírtuk a 0-át, mert a váltakozásban ez is előfordul. E szám egymásra következő többszöröseiből közöljük a következőket:

$$2 - \text{szerese} = 1.176.470.588.235.294$$

$$3 - \text{szorosa} = 1.764.705.882.352.941$$

$$4 - \text{szerese} = 2.352.941.176.470.588.$$

Ha 17-tel szorzunk csupa 9-essel írott számot kapunk, tehát

$$\frac{588.235.294.117.647 \times 17}{9.999.999.999.999.999.}$$

Ha 17-nél nagyobb számmal szorzunk, ismét úgy kell eljárnunk, mint a megelőző számnál; az utolsó 16 jegy előtt lévő számot elvágjuk és a végéhez hozzáadjuk. Ily módon megint az eredeti sorrendet kapjuk meg. Ha viszont a 17 többszöröseivel szorzunk, akkor a szabály betartásával csupa 9-est kapunk.

A következő phoenix-szám 18 jegyű, ha a 0-át is hozzászámítjuk:

$$052.631.578.947.368.421.$$

Ismét azzal a tulajdonsággal bír, hogy valamely $1-18$-ig terjedő számmal megszorozva, ugyanama jegysorozathoz vezet.

Ha 19-czel vagy annak többszöröseivel szorzunk, akkor csupa 9-est kapunk. A 19-nél nagyobb számmal való szorzásnál a kiegészítő szabályt kell szem előtt tartanunk.

A következő phoenix-szám oly óriás, hogy minden emberi számképzetet meghalad. 96 jegyből áll és számításom szerint a következő:

$$010.309.278.350.515.463.917.525.773.195.876.288.659.793.814.432-$$

$$989.690.721.649.484.536.082.474.226.804.123.711.340.206.185.567.$$

Meggyőződhetünk arról, hogy valamely számmal szorozva ugyanazt a jegysorozatot adja. Például 5-tel szorozva, lesz:

$$51.546.391.752.577.319 \ \ldots \ \text{stb.}$$

Ennél már 97 az a határ, a hol a direkt szabály megváltozik. 97-tel szorozva ugyanis csupa írott számot ád és azontúl a kiegészítő szabály alkalmazandó.

Ha az olvasó nem ijedt meg ettől az óriás számtól, akkor bátran követhet e titokzatos és a laikus szemében teljesen fölfoghatatlan tulajdonság megmagyarázásába is.

Ismeretes dolog, hogy közönséges törtet úgy alakítunk át tizedes törtté, hogy a számlálót elosztjuk a nevezővel.

Ennél az eljárásnál az is megtörténik, hogy az osztást nem végezhetjük el teljesen, hanem hogy bizonyos jegyen túl a maradékok és a hányados jegyei ismétlődnek. Így származik a szakaszos tizedes tört. Pl.

$$\frac{1}{3} = 0,\dot{3} \qquad \text{a szakasz } (3)$$

$$\frac{1}{7} = 0,\dot{1}4285\dot{7} \qquad " \qquad (142857)$$

$$\frac{1}{9} = 0,\dot{1} \qquad " \qquad (1)$$

$$\frac{1}{11} = 0,\dot{0}\dot{9}0 \qquad " \qquad (90)$$

$$\frac{1}{13} = 0,\dot{0}76923 \qquad " \qquad (076923).$$

Ha az $\frac{1}{7}$–et alakítjuk át tizedes törtté úgy, hogy a számlálót a nevezővel osztjuk, akkor a maradékok sorban 3, 2, 6, 4, 5, 1 és a hányados jegyei a mint láttuk: 1, 4, 2, 8, 5, 7. Ha $\frac{3}{7}$-et alakítjuk át, akkor a maradékok 2, 6, 4, 5, 1, 3 és így kell, hogy megfelelően a hányados jegyei is ugyanazok maradjanak: 4, 2, 8, 5, 7, 1 és így tovább.

$$\frac{1}{7} = 0,\dot{1}4285\dot{7} \qquad \frac{6}{7} = 0,\dot{8}5714\dot{2}$$

$$\frac{3}{7} = 0,\dot{4}2857\dot{1} \qquad \frac{4}{7} = 0,\dot{5}7142\dot{8}$$

$$\frac{2}{7} = 0,\dot{2}8571\dot{4} \qquad \frac{5}{7} = 0,\dot{7}1428\dot{5}$$

Minthogy $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ az $\frac{1}{7}$–nek 3–szorosa, 2–szerese, 6–szorosa stb., ebből már látható, hogy honnét ered a 142857 számsornak említett nevezetes tulajdonsága. Hogy 7–te1 szorozva csupa 9–est ád, az onnét van, mert $\frac{1}{7} \times 7 = 1$; de viszont $1 = 0,99999\ldots$, vagyis 1 oly szakaszos tizedes törttel tehető egyenlővé, mely csupa 9–esből áll. A további tulajdonságok tárgyalása már nem tartozik e rövid munka keretébe; bővebben megtalálható különböző számelméleti munkákban.

A föntebbiek után arra is következtethetünk, hogy phoenix-számokat kapunk mind ama $\frac{1}{p}$ alakú közönséges törtek szakaszaiból, melyeknek szakasza $p-1$ jegyből áll. Ilyen a föntebb említett számok mindegyike, nevezetesen

$$\frac{1}{17} = 0,\dot{0}58823529411764\dot{7}$$

$$\frac{1}{19} = 0,\dot{0}5263157894736842\dot{1}$$

$$\frac{1}{97} = 0, \text{(a 96 jegyből álló szakasz).}$$

Szükségesnek tartjuk megjegyezni, hogy nem minden törzsszámú nevezőből származik hasonló szám, pl.

$$\frac{1}{13} = 0,\dot{0}76923\ldots$$

$$\frac{1}{41} = 0,\dot{0}243\dot{9}\ldots$$

Ezek a szakaszok nem phoenix-számok, de valami érdekes tulajdonságuk mégis van. Annak kitalálását az olvasóra bízzuk.

Ide tartoznak azok a számok is, melyek szorzás után egyenlő jegyű számokat adnak. Ilyen szám mindenekelőtt 37; ha ezt a $3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15\ \ldots$ számsorozat számaival sorban megszorozzuk, akkor a következő eredményeket kapjuk:

$$37 \times 3 = 111$$

$$37 \times 6 = 222$$

$$37 \times 9 = 333$$

$$37 \times 12 = 444$$

$$37 \times 15 = 555$$

$$37 \times 18 = 666$$

$$37 \times 21 = 777$$

$$37 \times 24 = 888$$

$$37 \times 27 = 999.$$

Hogy ez miért van így? Azon senki sem csodálkozik, hogy 111×2 csupa 2–est, 111×3 csupa 3–ast ád és így tovább. Már pedig 37-et 6– tal úgy is lehet szorozni,– hogy először 3–mal, ezután 2–vel szorzunk: ámde 37–nek 3–mal való szorzata, a mint láttuk, csupa 1–es, így tehát az előbbeni különös tulajdonság magától világos.

Ez az egyszerű megoldás utat mutat arra nézve, hogyan lehet még más hasonló tulajdonságú számokat találni. Egyszerűen oly számpárokat kell keresni, melyeknek szorzata csupa 1-esből áll. Ilyeneket találunk, ha meggondoljuk, hogy az a szám osztható 3-mal, melynél a jegyek összege is osztható 3–mal. Világos tehát, hogy 111.111 két szám szorzatára bontható szét, melyeknek egyike a 3. Így

$$37.037 \times 3 = 111.111$$

$$37.037 \times 6 = 222.222$$

$$37.037 \times 9 = 333.333$$

$$37.037 \times 12 = 444.444 \text{ stb..}$$

Ez a 111.111 különben is igen érdekes szám. Ha az ember azt a kérdést veti fel, hogy a 3–on kívül még micsoda osztói vannak, akkor első pillanatra a kérdést igen nehéznek találja. Pedig rövid meggondolás és némi próbálgatások után csakhamar rájut, hogy következőképpen bontható fel törzstényezők szorzatára:

$$111.111 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37.$$

Ennélfogva igen sok osztója van, melyek a törzstényezők lehetséges szorzataiból egyenként képezhetők; összes osztóinak sorozata az 1–en és önmagán kívül itt következik:

3, 7, 11, 13, 21, 33, 37, 39, 77, 91, 111, 143, 231, 259, 273, 407, 429, 481,

777, 1001, 1221, 1443, 2849, 3003, 3367, 5291, 8517, 10101, 15873, 37037.

Ha most a megfelelő osztókat kombináljuk, akkor egész sereg oly szorzást állíthatunk össze, melyből egyenlő jegyek kerülnek ki. Így

$$15.873 \times 7 = 111.111 \qquad 10.101 \times 11 = 111.111$$
$$15.873 \times 14 = 222.222 \qquad 10.101 \times 22 = 222.222$$
$$15.873 \times 21 = 333.333 \qquad 10.101 \times 33 = 333.333$$

. . . .

$$8.547 \times 13 = 111.111 \qquad 5.291 \times 21 = 111.111$$
$$8.547 \times 26 = 222.222 \qquad 5.291 \times 42 = 222.222$$
$$8.547 \times 39 = 333.333 \qquad 5.291 \times 63 = 333.333$$

. . . .

$$3.367 \times 33 = 111.111 \qquad 2.849 \times 39 = 111.111$$
$$3.367 \times 66 = 222.222 \qquad 2.849 \times 78 = 222.222$$
$$3.367 \times 99 = 333.333 \qquad 2.849 \times 117 = 333.333$$

. . . .

A következő 1–esekkel írott szám, melynek egy pár osztója ismeretes: 111.111.111. Rögtön látjuk, hogy 3–mal, 9–czel és 37–tel osztható.

$$37.037.037 \times 3 = 111.111.111$$
$$37.037.037 \times 6 = 222.222.222$$
$$37.037.037 \times 9 = 333.333.333$$

. . . .

$$12.345.679 \times 9 = 111.111.111$$
$$12.345.679 \times 18 = 222.222.222$$
$$12.345.679 \times 27 = 333.333.333$$

. . . .

$$333.667 \times 333 = 111.111.111$$
$$333.667 \times 666 = 222.222.222$$
$$333.667 \times 999 = 333.333.333$$

. . . .

Hogy a 12 egyessel írott szám (111.111.111.111) mindazokkal a számokkal osztható, a melyekkel a 111.111, az is közvetlenül belátható és így megint egész sereg egyenlő jegyű szorzatot írhatunk fel. Pl.

$$37.037.037 \times 3 = 111.111.111.111$$
$$37.037.037 \times 6 = 222.222.222.222$$

. . . .

$$1.587.315.873 \times 7 = 111.111.111.111$$
$$1.587.315873 \times 14 = 222.222.222.222$$

. . . .

Hasonló módon találtam még a következőt:

$$48.309.178.743.961.352.657 \times 23 = 111.111.111.111.111.111.111$$

ugyanaz a szám 46–tal szorozva ád:

222.222.222.222.222.222.222-t

és így tovább.

$$65.359.477.124.183 \times 17 = 1111.111.111.111.111$$

$$65.359.477.124.183 \times 34 = 2222.222.222.222.222.$$

Ezek után semmi nehézséget sem fog okozni a következő jelenség okának kitalálása:

$$\begin{aligned} 1 \times 9 + 2 &= 11 \\ 12 \times 9 + 3 &= 111 \\ 123 \times 9 + 4 &= 1111 \\ 1234 \times 9 + 5 &= 11111 \\ 12345 \times 9 + 6 &= 111111 \\ 123456 \times 9 + 7 &= 1111111 \\ 1234567 \times 9 + 8 &= 11111111 \\ 12345678 \times 9 + 9 &= 111111111 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 \times 9 + 7 &= 88 \\ 98 \times 9 + 6 &= 888 \\ 987 \times 9 + 5 &= 8888 \\ 9876 \times 9 + 4 &= 88888 \\ 98765 \times 9 + 3 &= 888888 \\ 987654 \times 9 + 2 &= 8888888 \\ 9876543 \times 9 + 1 &= 88888888 \\ 98765432 \times 9 \qquad &= 888888888 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \times 8 + 1 &= 9 \\ 12 \times 8 + 2 &= 98 \\ 123 \times 8 + 3 &= 987 \\ 1234 \times 8 + 4 &= 9876 \\ 12345 \times 8 + 5 &= 98765 \\ 123456 \times 8 + 6 &= 987654 \\ 1234567 \times 8 + 7 &= 9876543 \\ 12345678 \times 8 + 8 &= 98765432 \\ 123456789 \times 8 + 9 &= 987654321 \end{aligned}$$

Idézzük még a következő nevezetes négyzeteket:

4	négyzete	16
34	"	1156
334	"	111556
3334	"	11115556
33334	"	1111155556

és így tovább. Hasonló módon:

7	négyzete	49
67	"	4489
667	"	444889
6667	"	44448889
66667	"	4444488889

és így tovább.

Itt említjük meg, hogy 8.212.890.625 szám minden hatványa ugyanezekkel a jegyekkel végződik. Éppen ilyen tulajdonságú 1.787.109.376 is. De nemcsak ezek a számok önmaguk, hanem minden más nagyobb szám, mely ezekkel a jegyekkel végződik, éppen ilyen tulajdonságú. A ki érdeklődik ez iránt, maga is kereshet más kisebb számokat, melyek hasonló tulajdonságúak.