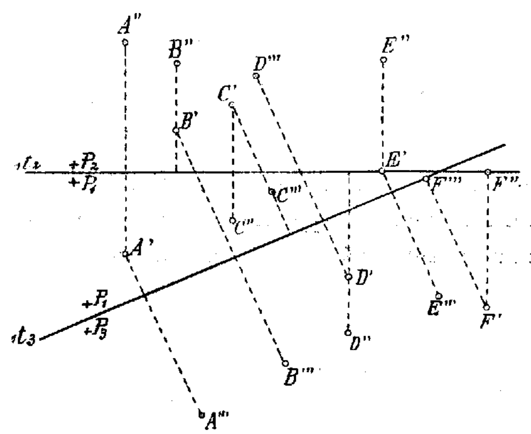
Az ábrázoló mértanban lépten–nyomon előfordul, hogy a szerkesztések végrehajtása nagy nehézséget okoz. Így pl. egy adott egyenesre adott pontból merőleges egyenest ejteni, ha az egyenes általános helyzetű mindkét képsíkhoz, elég komplikált szerkesztést követel; ellenben, ha az egyenes merőlegesen áll az egyik képsíkra, a feladat megoldása nagyon egyszerű.

A szerkesztések végrehajtásának egyszerűsítését czélozzák a *transzformācziók*. Ezek abban állanak, hogy régi képsíkokról oly új képsíkokra térünk át, melyek speciális viszonyban vannak a megoldandó feladattal. Egy képsíkrendszerről egy másik képsíkrendszerre csak úgy térhetünk át, ha az új képsík a régiek egyikére merőlegesen áll.

Mielőtt azonban áttérnénk a transzformácziók részletes tárgyalására, jelöléseinkben kell megállapodnunk.

Két egymásra merőleges (pl. egy vízszintes és egy függőleges) sík egymást két–két részre osztja. Megkülönböztethető ilyenkor a vízszintes síknak a függőleges sík előtt és alatt és mögött levő része és viszont a függőleges síknak a vízszintes sík alatt és felett levő része. Ha e két síkot képsíkoknak tekintjük, a vízszintes síkot első (P_1), a függőleges síkot második képsíknak (P_2) szoktuk nevezni és a következő megállapodások az általánosak: *(a)* Az első és második képsík metsző egyenesét, a vetítés tengelyét, ${}_1t_2$-vel szokás jelölni; hol az 1, 2 index azt jelenti, hogy e tengely az első és második képsíkok által meghatározott képsíkrendszer vetítés tengelye. Így ${}_1t_3$ jelenti az első és harmadik képsík metsző egyenesét. *(b)* Az A pontnak első ill. második képét A' ill. A'' jelenti. *(c)* Az A pontnak leforgatását az első képsíkba $(A)_1$, árnyékát az első képsíkon A_1-gyel jelöljük. *(d)* S_1 és S_2 az egyenes első ill. második nyompontját, és a sík első ill. második nyomvonalát jelentik.$(ab) \equiv P$ jelentse az a és b egyenesek metszőpontját, a P-t. *(e)* Az első képsíknak a második képsík előtt levő részét pozitívnak ($+P_1$), a másikat negatívnak ($-P_1$), a második képsíknak az első képsík felett ill. alatt levő részét pozitív ($+P_2$), ill. negatívnak ($-P_2$)-nek nevezzük. *(f)* Az ordinátāk előjelei: az első képsík fölött, ill. alatt fekvő pontok első ordinátái pozitívak, ill. negatívak; a második képsík előtt, ill. mögött fekvő pontok második ordinátái pozitívak, ill. negatívak (értvén a pont első, második ordinátája alatti a pont távolságát az első, ill. második képsíktól).

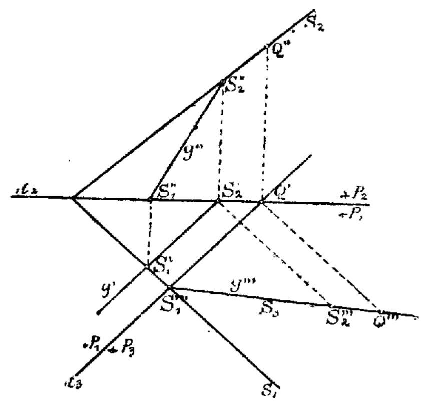


Ezek után próbáljuk meg a pont transzformálását egy oly képsíkra, mely a régiek egyikére (pl. az elsőre) merőlegesen áll. Vegyük fel, hogy az új képsík az első képsíkot ${}_1t_3$ egyenesben metszi (1. ábra) s a harmadik képsíknak a vízszintes képsík fölött levő részét az első képsíkba úgy forgattuk le, hogy ez az ${}_1t_3$ azon oldalára esett, melyen a ($+P_3$) áll. Ilyenkor a harmadik (a transzformált) kép meghatározása a következő egyszerű elvek szerint történik: Két összetartozó kép mindig a megfelelő tengelyre merőleges egyenesbe esik. A pont első ordinátája egyenlő (jelre és nagyságra nézve) a pont harmadik képének távolságával az ${}_1t_3$ vet. tengelytől.

Ezen elvek szerint tehát a harmadik képet megkapjuk, ha A'-ból az ${}_1t_3$ tengelyre merőlegest vonunk s erre az első ordinátát ($=A''$ távolságával ${}_1t_2$-től), mely pozitív előjelű, az ${}_1t_3$ tengelytől pozitív irányban rámérjük. Ugyanígy nyerhetjük a pont transzformált képét, ha az új képsíkot ${}_1t_3$ körül az első képsíkba ellenkező irányban forgatjuk.

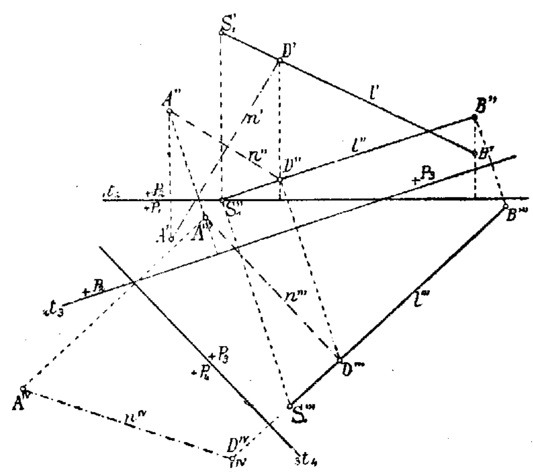
Lássuk már most a többi negyedben fekvő pont transzformalását (1.ábra). A B pont a második térrészben fekszik, tehát első ordinátája pozitív s így ezt az ordinátát is, úgy, mint az A pontéval történik, a P_3 pozitív felére kell rámérni ${}_1t_3$-tól. A harmadik térrészben levő C pont első ordinátája negatív s ilyen értelemben van felmérve az ${}_1t_3$-tól is. Hasonló gondolatmenet vezérelt a többi pontok transzformálásánál is.

A pontok transzformálása után áttérhetünk az egyenes transzformálására. Egy egyenest úgy transzformálunk, hogy két pontját transzformáljuk.



A 2. ábra egy az ${}_1t_2$ képsíkrendszerben egész általános helyzetű g egyenes transzformálását mutatja be az ${}_1t_3$ képsíkrendszerben, hol a g egyenes már az egyik – t. i. a harmadik – képsíkkal párhuzamos.

A 3. ábra egy általános helyzetű l egyenes transzformálását tünteti fel, úgy, hogy az egyenes az új képsíkrendszerben a negyedik képsíkra merőlegesen áll.



Ily esetben a transzformáczió két lépésben történhetik meg csupán, mert a bevezetett képsíknak mindig merőlegesen kell állnia a régiek egyikére. A transzformálás sorrendje ez esetben a következő: Először az ${}_1t_2$-ről áttértünk ${}_2t_3$-ra (most tehát a második és harmadik képsíkokat tekintjük együvé tartozóknak) és a ${}_2t_3$-at úgy választottuk, hogy $l \parallel P_3$ legyen, vagyis $l'' \parallel_2 t_3$; ezután a ${}_2t_3$-ról áttértünk ${}_3t_4$-re (vagyis most a harmadik és negyedik képsíkok tartoznak együvé) és a ${}_3t_4$-t úgy választottuk, hogy merőlegesen álljon P_4-re (tehát ${}_3t_4$ merőleges l'').

A síkot úgy transzformáljuk, hogy felkeressük a sík nyomvonalát az új képsíkon. A 2. ábrán egy általános helyzetű síkot úgy transzformáltunk, hogy az új rendszerben vetítő sík lett.

Lássunk már most néhány példát a transzformácziók alkalmazására: *(1)* Adva van egy általános helyzetű l egyenes és egy A pont; meghatározandó a pont távolsága az egyenestől (3. ábra). Ismert elvek alapján az egyenest és a pontot oly képsíkrendszerbe transzformáljuk, melyben az egyenes a képsíkok egyikére merőlegesen áll. Miután l P_4-re merőlegesen áll, a legrövidebb távolságot –n– megkapjuk, ha A^{IV}-t összekötjük l^{IV}-gyel és A'''-ból párhuzamost vonunk ${}_3t_4$-gyel. $(A^{IV}l^{IV})$ távolság a távolság valódi nagyságát adja. n második és első képét a harmadik és negyedik képből könnyű szerrel határozhatjuk meg.

(2) Adva van két általános helyzetű sík; meghatározandó hajlásszögük transzformáczió segélyével.

Minthogy két sík hajlásszöge magától adódik ki, ha közös egyenesük a képsíkok egyikére merőlegesen áll, a transzformácziót úgy hajtjuk végre, hogy P_4 merőlegesen álljon a síkok metsző vonalára.

Transzformáczióval oldhatók meg a következő feladatok:

LXVII. Adva van két egymást nem metsző, általános helyzetű egyenes; kerestessék az egyeneseket merőlegesen metsző egyenes.

LXVIII. Meghatározandó egy egyenes távolsága a vetítés tengelyétől.

LIX. Meghatározandó egy pont távolsága egy megadott síktól.

LXX. Két általános helyzetű egyenes transzverzálisát meghatározni, mely egy adott egyenessel párhuzamos.

LXXI. Adva van két általános helyzetű, egymást elkerülő egyenes. Meghatározandó az általuk bezárt szög nagysága.

LXXII. Adva van egy egyenes két képe által. Meghatározandó a képek legrövidebb távolsága.

LXXIII. Adva van P pont, g egyenes és S sík. Meghatározandó oly a P ponton átmenő l egyenes, mely merőleges g-re és párhuzamos S-el.

LXXV. Adva van S sík és kívüle fekvő g egyenes. Meghatározandó g egyenes azon pontja, mely a síktól adott távolságra van.

Petrozsény.