11. *Az Archimedes-féle testek* másképpen semi-regularis testeknek is neveztetnek. Ezeket *Pappas* irataiból ismerjük. Hálózataikat 1538-ban *Dürer Albrecht* készítette el. *Keppler a harmonices mundi libri V.*-ben (II.28.) tesz róluk említést. A hozzájuk tartozó poláris polyedereket pedig *Müller I. H. T.* trigonometriájában (1852. p. 345.) találjuk fölemlítve.

Ezeknek a testeknek oldallapjai különböző nemű szabályos sokszögek, testszögleteik pedig egyneműek és hasonlóak. A poláris polyedereknek egynemű és hasonló oldallapjaik vannak, testszögleteik pedig különböző neműek, de szabályosak. Az alább következő tárgyalásban *dr. Baltzer Richard* Elemente der Mathematik II. §. 7 után indulok.

I. A polyedereknek testszögletei mindannyian m-élűek legyenek. Ekkor:

$$2e = mc = 2c + 2l - 4.$$

Innét:

$$c = 2\frac{l-2}{m-2}.$$

A lehetséges esetek:

$$m = 3, \quad 2e = 3c = 6(l-2)$$

$$m = 4, \quad e = 2c = 2(l-2)$$

$$m = 5, \quad 2e = 5c = \frac{10}{3}(l-2).$$

II. Ha a polyeder minden csúcsában szám szerint

$$\alpha \quad n\text{-szögű}$$

$$\beta \quad n'\text{-szögű}$$

$$\gamma \quad n''\text{-szögű stb.}$$

lap találkozik, akkor

$$2c = (\alpha + \beta + \gamma \ldots) \cdot c.$$

A polyederen van ac számú, az n oldalú sokszögekhez tartozó szög, s így az n-oldalú sokszöglapok száma $= \frac{ac}{n}$. Ezt a többiekre is alkalmazván, a lapok száma

$$l = \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n'} + \frac{\gamma}{n''} + \ldots\right) \cdot c.$$

Az *Euler*-féle egyenlet 2-szerese alapján

$$2l + 2c - 2e = 4$$

s ha ebbe a megelőzőleg nyert értékeket helyettesítjük, akkor

$$\left\{2\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n'} + \frac{\gamma}{n''} + \ldots\right) + 2 - (\alpha + \beta + \gamma \ldots)\right\} c = 4.$$

honnét:

$$\left(2 - \alpha \cdot \frac{n-2}{n} - \beta \cdot \frac{n'-2}{n'} - \ldots\right) \cdot c = 4.$$

Ezt az egyenlőségét *Meier Hirsch* Geometrische Aufgaben II. p. 171. találhatjuk.

A kivonandó akkor legkisebb értékű, ha:

$$\alpha = \beta = \gamma = \ldots = 1$$

$$n = 3, \quad n' = 4, \quad n'' = 5, \quad n''' = 6.$$

Ebben az esetben

$$2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6}\right)$$

negatív szám volna, s így olyan polyederek, a melyeknek testszögletei egyneműek és hasonlóak, s melyeknek oldallapjai 4-féle sokszögek volnának, nem léteznek.

II. A polyeder testszögleteire nézve a II.-ben megállapított föltevéseket fenntartva, és föltéve, hogy az n, n', n'' ... számok egyike, pl. n páratlan, könnyen kimutatható, hogy akkor az

$$n - 1, \quad n' \; n'' \; \ldots$$

számok egyikének legalább is 2-vel egyenlőnek kell lennie.

Ugyanis, ha az n oldalú sokszög első, harmadik, ötödik... oldalához egy n-oldalú sokszög egy-egy oldalát kapcsoljuk, akkor végre egy csúcsban 3 ilyen n-oldalú lap fog találkozni. De ha az n-oldalú első, harmadik, ötödik ... oldalához egy n'-oldalú sokszög egy-egy oldalát kapcsoljuk, akkor végre oly csúcsra találunk, a melyben 2 olyan n'-oldalú lap találkozik. Ennélfogva az

$$n-1, \quad n\,, \quad n''$$

számok mindegyike nem lehet kisebb 2-nél.

Ezt a tételt *Keppler*-nek köszönhetjük.

Ezek alapján most már az összes lehetőségeket megismerhetjük.

12. *Háromélű testszögletekkel bíró polyederek.* (a) Minden csúcsban egy n-oldalú és két n' oldalú sokszög találkozik. A III. tétel miatt n' páros szám. A II. tétel alapján:

$$\left(\frac{2}{n}+\frac{4}{n'}-1\right)\cdot c=4,$$

s így a lehetőségek a következők:

$n=k,$	3,	3,	3,	4,	5
$n'=4,$	6,	8,	10,	6,	6
$e=2k,$	12,	24,	60,	24,	60

Az ilyen polyederek oldallapjai közt van szám szerint $\frac{c}{n}$ olyan, mely n-szögű és $\frac{2c}{n'}$ olyan, a mely n'-szögű.

(b) Ide tartoznak azok a testek is, melyek 3-féle oldallapoktól határoltatnak. Ha minden csúcsban egy n-oldalú, egy n'-oldalú és egy n'' sokszög találkozik, akkor n, n' és n'' páros számok tartoznak lenni és a

$$\left(\frac{2}{n}+\frac{2}{n'}+\frac{2}{n''}-1\right)\cdot c=4$$

egyenletnek csak 2 megfejtése van:

n	n'	n''	c
4	6	8	48
4	6	10	120

Az ilyen polyedernek van

$$\begin{array}{llll} \frac{c}{n} & \text{számú} & n & \text{oldalú} \\ \frac{c}{n'} & \text{"} & n' & \text{oldalú} \\ \frac{c}{n''} & \text{"} & n'' & \text{oldalú lapja.} \end{array}$$

13. *Négyélű testszögletekkel bíró polyederek.*

(a) Minden csúcsban három n-szögű és egy n' szögű, sokszög találkozik, akkor

$$\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n'}-1\right)\cdot c=2$$

s ennek az egyenletnek csak két megfejtése van:

n	n'	c
3	n	2k
4	3	24

Az ilyen polyedernek van $\frac{3c}{n}$ számú n-oldalú és $\frac{c}{n'}$ számú n' oldalú oldallapjuk.

(b) Ha minden csúcsban két n-oldalú és két n'-oldalú sokszög találkozik, akkor

$$\left(\frac{2}{n}+\frac{2}{n'}-1\right)\cdot c=2$$

alapján csak két test áll elő:

n	n'	c
3	4	12
3	5	30

Ezeknek van $\frac{2c}{n}$ számú n-oldalú és $\frac{2c}{n'}$ számú n'-oldalú oldallapjuk.

(c) Ha minden csúcsban egy n-oldalú és két n' oldalú és egy n'' oldalú sokszög találkozik, akkor n'-nek párosnak kell lennie, s az

$$\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n'}+\frac{1}{n''}-1\right)\cdot c=2$$

egyenletnek csakis egy megoldása van, t.i.

n	n'	n''	c
3	4	5	60

Ennek a polyedernek oldallapjai közt van 20 háromszög, 30 négyszög és 12 ötszög.

14. *Ötélű testszögletekkel bíró polyederek.* Föltéve, hogy minden csúcsban négy n-szög és egy n' szög találkozik, akkor

$$\left(\frac{8}{n}+\frac{2}{n'}-3\right)\cdot c=4$$

s ennek az egyenletnek csak két megoldása van:

n	n'	c
3	4	24
3	5	60

Ezeknek a polyedereknek van $\frac{4c}{n}$ számú n-oldalú és $\frac{c}{n'}$ számú n'-oldalú oldallapjuk.

15. *Általános megjegyzések. Pappus* és *Keppler* csak 13-féle Archimedikus testet ismertek; mert a $2k$ csúccsal bíró polyedereket a felsorolásból kihagyták. Ilyen pedig kétféle van, a szerint, a mint minden csúcsban két négyszög és egy k-szög, illetőleg három háromszög és egy k-szög találkozik.

A poláris testek csupán m-szögű oldallapokkal vannak határolva. Az ezeknek megfelelő eredmények a megelőzőkből úgy nyerhetők, ha a már több ízben jellemzett reciprocitás értelmében c helyébe l-et teszünk és n-oldalú oldallapok helyett n-oldalú testszögleteket mondunk. Vannak tehát archimedikus testek, melyek csupa háromszöglapokkal, négyszöglapokkal és ötszöglapokkal határoltak. Az utóbbiak közül *Keppler* és *Hirsch Meier* különösen a rhomboedereket vizsgálták meg közelebbről.

Ezzel egyelőre befejezzük a polyederekről elmondandókat; egy későbbi alkalommal azonban újra felvesszük a fonalat és tovább fűzzük, megismertetvén lapunk olvasóit a *Poinsot*-féle polyederekkel.[1]

[1] Lapunk deczemberi számába értelemzavaró sajtóhiba csúszott be; a 94. lap hetedik sorában a helyes szöveg ez: Mint azt az alábbi táblázat mutatja, megvan köztük a reciprocitás, a mennyiben az oktaederrel szembe helyezhető a hexaeder, a dodekaederrel az ikosaeder, a tetraeder önönmagának a conjugáltja.