A stereometriában a polyederekről csupán egy általános tétel szokott a középiskolában tárgyaltatni, az ú. n. *Euler*-féle tétel. A következőkben a rendelkezésemre álló források alapján kiegészítendem a tanulóknak a polyederekről szerzett ismereteit, még pedig oly részletekkel, melyek minden nehézség nélkül könnyen megérthetők, s a tanuló látókörét tágítani alkalmasak.

1. *Euler tétele.* Convex polyeder alatt oly zárt testet értünk, melynek bármely oldallapját határtalanul kiterjeszthetjük a nélkül, hogy ez a lap a testet két darabra vágná. E szerint a convex polyeder minden oldal lapjának csakis egyik oldalán terül el. Ezeket előrebocsátva, mondhatjuk, hogy: *minden convex polyedernél az éleknek* 2*-vel megnövesztett száma egyenlő a lapok és csúcsok összegével.*

A tankönyveinkben hagyományos bebizonyítás helyett a következőt hozom javaslatba, mely *Cauchy*-tól származott és egyszerűbb, valamint érthetőbb is amannál.

Behizonyítandó, hogy:

$$e+2=l+c. \tag{1}$$

Tekintsünk egyelőre egy összefüggő, de nyitott convex polyedrális felületet. Ennek széle síkban fekvő vagy térbeli polygon leszen. Erre az alakzatra nézve áll az

$$e+1=l+c$$

egyenlőség, a mit *teljes inductió* segítségével könnyen igazolhatunk. Ugyanis, ha a lapok száma $l=1$, vagyis az alakzat egyetlen egy sík sokszögből áll, akkor a tétel közvetlenül világos; mert a sokszögben az élek száma egyenlő a csúcsok számával. Föltéve már most, hogy a tétel l számú lap esetében áll, csupán azt kell bebizonyítanank, hogy $l+1$ számú lap esetében is érvényes.

E czélból csatoljunk a tekintetbe vett alakzathoz egy új lapot, melynek m oldala és m csúcsa legyen. Ha ezen új lapnak az alakzathoz való csatolása nem létesít zárt polyedert, akkor az új lap kerülete nem eshetik össze az alakzat szélével. Föltéve, hogy az új lapnak p számú éle esik egybe az alakzat szélével, akkor $p+1$ csúcsa is közössé válik (mert 1 él 2 csúcsot, 2 él 3 csúcsot stb. köt össze). Ennélfogva az új lapnak még $m-p$ éle és $m-p-1$ csúcsa marad szabadon. Az új lap hozzácsatolásával az eredeti alakzat lapjainak száma $(l+1)$-gyé vált, éleinek száma $(m-p)$-vel, csúcsainak száma pedig $(m-p-1)$-gyel szaporodott, s így éleinek száma

$$e+m-p$$

csúcsainak száma pedig

$$c+m-p-1.$$

Már pedig ezek az adatok eleget tesznek az

$$e+1=l+c$$

egyenlőségnek.

Tekintsünk már most egy zárt convex polyedert, és nyissuk ezt ki oly módon, hogy egyik oldallapját eltávolítjuk. Akkor az így előálló alakzatra érvényes föntebbi tételünk, a mennyiben az élek és csúcsok száma ugyanaz maradt, csupán a lapok száma csökkent 1-gyel. Így tehát a nyitott polyedrális lapra nézve

$$e+1=(l-1)+c$$

honnét

$$e+2=l+c.$$

2. *Történeti adatok.* A tétel már az ókorban ismeretes lehetett; mert e nélkül *Archimedes* nem sorolhatta volna fel a *semi-reguláris* testeket. Előfordul a tétel *Descartes*-nál is (Oeuvres inédites de D. par M. Foucher de Careil. II. p. 214.), de nincsen explicite kifejezve. Ennélfogva valódi feltalálója *Euler*, ki ezt 1752-ben közölte, bebizonyításával együtt. (Nov. comm. Petrop. 4. p. 109. és 156.)

A *Cauchy*-féle bebizonyitás 1813-ban (Journ. de l'École polyt. Cah. 16. p. 577.) jelent meg. Vannak még számos más bizonyítások is, mint pl. *Grunert*-é (Crelle Journ. II. p. 367.); *Staudt*-é (Geometrie der Lage p. 49. 1847); *Thicme*-é, (Szt.-Pétervárról 1867. nov. 10-éről kelt levelében); *August*-é (a kölni realgymnasium 1854-iki értesítőjének 4. oldalán) végre *Legendre* (Geom. VII. 25.), *L'Huilier* (Gergonne Annales 1812. p. 178.) és *Steiner* (Crelle Journ. I. p. 364.) bizonyításai. A bizonyításoknak sokoldalúsága és nagy száma rendszerint a tétel kiváló fontossága mellett tanúskodik.

3. *A tétel következményei.* Tekintsünk ezek után egy oly polyedert, melynek oldallapjai közt van szám szerint: l_3 háromszögű, l_4 négyszögű, l_5 ötszögű ... lap. Akkor:

$$l=l_3+l_4+l_5+\dots \tag{2}$$

és minthogy minden él két laphoz tartozik, tehát

$$2c=3l_3+4l_4+5l_5+\dots \tag{3}$$

Az utóbbi egyenletből

$$3l_3+5l_5+\dots=2c-4l_4-6l_5-\dots$$

tehát

$$3l_3 + 5l_5 + \ldots = \text{páros számmal.}$$

Vgyis: *a convex polyederben a páratlan oldalú oldallapok száma páros.*

Tekintsünk továbbá egy oly polyedert, melyen szám szerint L_3 trieder, L_4 tetraeder, L_5 pentaeder ... csúcs találhaló. Akkor:

$$c = L_3 + L_4 + L_5 + \ldots \tag{4}$$

és minthogy minden él két csúcsot köt össze, tehát

$$2c = 3L_3 + 4L_4 + 5L_5 + \ldots \tag{5}$$

Az utóbbi egyenletből

$$3L_3 + 5L_5 + \ldots = 2c - 4L_4 - \ldots$$

tehát

$$3l_3 + 5l_5 + \ldots = \text{páros számmal.}$$

Vagyis: *a convex polyederben a páratlan oldalú testszögletek száma páros.*

Ha az (1), (2) és (3) egyenlőségekből l és c kiküszöböltetnek, akkor

$$2c = 4 + l_3 + 2l_4 + 3l_5 + \ldots \tag{6}$$

ha pedig az (1), (4) és (5) egyenlőségekből c és e kiküszöböltetnek, akkor

$$2l = 4 + L_3 + 2L_4 + 3L_5 + \ldots \tag{7}$$

származik

Ezek a tételek *Legendre*-től (Géom. Note 8.) származnak és *Gergonne*-tól (Ann. de Math. 15. p. 157.) egészíttettek ki. Segítségükkel nehány igen érdekes tételt bizonyíthatunk be.

4. *Minden convex polyederben a háromszögű oldallapok és a triederek számainak összege legalább is* 8.

Ugyanis az *Euler*-féle egyenletet 4-gyel sokszorozván:

$$4l + 4c = 4e + 8.$$

Itt l-et a (2) és c-t a (4) egyenlettől helyettesítvén, $4e$-t pedig a (3) és (5) egyenletek összegéből állítván elő:

$$4(l_3 + l_4 + \ldots) + 4(L_3 + L_4 + \ldots) = 8 + (3l_3 + 4l_4 + \ldots) + (3L_3 + 4L_4 + \ldots).$$

Ezt pedig így is írhatjuk:

$$4(l_3 + L_3) + 4(l_4 + L_4) + 4(l_5 + L_5) + \ldots =$$
$$= 3(l_3 + L_3) + 4(l_4 + L_4) + 5(l_5 + L_5 + \ldots + 8,$$

más szóval:

$$l_3 + L_3 = 8 + (l_5 + L_5) + 2(l_6 + L_6) + \ldots \tag{8}$$

a mi előrebocsátott tételünk helyessége mellett bizonyít.

5.*Olyan convex polyeder, a melynek minden oldallapja* 5-*nél többoldalú sokszög volna, nincsen.*

Ugyanis a (4) egyenlőség 3-szorosát az (5) egyenlőséggel összehasonlítva, azt találjuk hogy $2e > 3c$. Ebbe az egyenlőtlenségbe e-nek és c-nek értékeit a (8) ill. (6) egyenlőségekből helyettesítvén:

$$3l_3 + 4l_4 + 5l_5 + \ldots > \frac{1}{2}(12 + 3l_3 + 6l_4 + 9l_5 + \ldots)$$

$$6l_3 + 8l_4 + 10l_5 + \ldots > 12 + (3l_3 + 6l_4 + 9l_5 + \ldots)$$

$$3l_3 + 2l_4 + l_5 > 12 + (l_7 + 2l_8 + \ldots) \tag{9}$$

Innét az következik, hogy l_3, l_4 és l_5 egyszerre nem lehetnek zérus értékűek, a mi előrebocsátott tételünknek megfelel.

6. *Olyan convex polyeder, a melynek minden csúcsában* 5-*nél több él találkoznék, nincsen.*

Ugyanis a (2) egyenlőség 3-szorosát a (3) egyenlőséggel összehasonlítva, azt találjuk, hogy $2e > 3l$. Ebbe az egyenlőtlenségbe e-nek és l-nek értékeit az (5) és (6) egyenlőségekből helyettesítvén:

$$3L_3 + 4L_4 + 5L_5 + \ldots > \frac{1}{2}(12 + 3L_3 + 6L_4 + 9L_5 + \ldots)$$

$$6L_3 + 8L_4 + 10L_5 + \ldots > 12 + (3L_3 + 6L_4 + 9L_5 + \ldots)$$

(10) $$3L_3 + 2L_4 + L_5 > 12 + (L_7 + 2L_8) + \ldots)$$

Innét következik, hogy L_3, L_4 és L_5 egyszerre nem lehetnek zérus értékűek, a mi előrebocsátott tételünknek megfelel.

7. *A tételek közti kapcsolatosság,* melynél fogva a (2) és (4) egyenlőségek, (3) és (5) valamint (6) és (7) egymással szembeállíthatók, az *Euler*-féle tétel azon tulajdonságának tudandó be, hogy a tétel az l és c mennyiségekre, vagyis a lapok és csúcsok számaira nézve symmetrikus. Ez a kapcsolatosság olyan, mint a gömbháromszög és poláris gönbháromszöge közötti összefüggés. Minden adott polyedernek megfelel egy ugyanannyi élű poláris polyeder, ha az első minden m-oldalú testszögletének a másodiknak egy-egy m-oldalú oldallapja felel meg, és az első minden n-oldalú lapjának a második egy n-oldalú testszöglete felel meg. Ezt a polaritást 1532-ben *Maurolyeus* vette észre, *Keppler* (harm. mundi libri V.) és *Meister* (1785-ben Comm. Götting. VII. p. 39.) fejlesztették tovább. Általános érvényességű tételbe *Gergonne* foglalta.

8. *További következtetések* vonhatók le a (8), (9) és (10) egyenletekből. Ugyanis a (8)-ból következik, hogy *nincs olyan polyeder, a melynek egyidejűleg se háromszöglapja, se trieder csúcsa ne volna.*

(9)-ből, ha $l_3 = 0$ és $l_4 = 0$ az következik, hogy

$$l_5 > 12 + (l_7 + 2l_8 + \ldots)$$

szóval: *az olyan polyedernek, a melynek se háromszögű, se négyszögű oldallapja nincsen, legalább is* 12 *ötszögű oldallapjának kell lennie.*

Ha (7)-ben l-et (2)-ből helyettesítjük, akkor

$$2(l_3 + l_4 + l_5 + \ldots) = 4 + (L_3 + 2L_4 + 3L_5 + \ldots)$$

származik. Ha pedig (6)-ban c-t (4)-ből helyettesítjük, akkor

$$2(L_3 + L_4 + L_5 + \ldots) = 4 + (l_3 + 2l_4 + 3l_5 + \ldots)$$

Ezekből új egyenleteket kapunk, ha az elsőnek 3-szorosához hozzáadjuk a másodiknak 2-szeresét.

$$6l_3 + 6l_4 + 6l_5 + \ldots + 4L_3 + 4L_4 + 4L_5 + \ldots =$$

$$= 12 + 3L_3 + 6L_4 + 9L_5 + \ldots + 8 + 2l_3 + 4l_4 + 6l_5 + \ldots$$

Innét:

$$4l_3 + 2l_4 + L_3 = 20 + (2L_4 + 5L_5 + 8L_6 + \ldots) + (2l_6 + 4l_7 + \ldots)$$

Ha itt föltételezzük, hogy $l_3 = 0$ és $l_4 = 0$, akkor:

$$L_3 = 20 + (2L_4 + \ldots) + (2l_6 + \ldots)$$

szóval: *az olyan polyederen, a melynek se háromszögletű, se négyszögletű oldallapja nincsen, legalább is* 20 *háromoldalú csúcsot találunk.*

Hasonlóképpen áll:

$$4L_3 + 2L_4 + l_3 = 20 + 2l_4 + 5l_5 + 8l_8 + \ldots + 2L_6 + \ldots$$

Ha itt föltételezzük, hogy $L_3 = 0$ és $L_4 = 0$, akkor

$$l_3 = 20 + (2l_4 + \ldots) + (2L_6 + \ldots)$$

szóval: *az olyan polyederen, a melynek se háromoldalú, se négyoldalú testszöglete nincsen, legalább is* 20 *háromszöglapot találunk.*

Hasonlóképpen még számos tételt állíthatunk fel.

9. *Szabályos testek.* Az *Euler*-féle tétel alapján könnyen kimutatható, hogy *csakis* 5*-féle olyan convex polyeder létezik, a melyeken minden oldallap ugyanannyi-oldalú sokszög és minden testszögleten ugyanannyi él találkozik.*

Ha az oldallapok n oldalú sokszögek, s a testszögletek m-élűek, akkor minden él két lapnak levén metszésvonala és két csúcsot kötvén össze:

$$2e = nl = mc.$$

Ezen egyenlőségekkel az *Euler*-féle egyenlőségből e és c kiküszöböltetvén:

$$l = \frac{4m}{2(m+n) - mn}.$$

Itt n-nek, rendre a lehetséges értékeket tulajdonítván, a következő esetek állanak elő:

(1)

$$n=3,\ l=\frac{4m}{6-m}.\quad \begin{array}{llll} Ha & m=3 & akkor & l=4 \\ " & m=4 & " & l=8 \\ " & m=5 & " & l=20 \end{array}$$

s így a *tetraeder, oktaeder* és *ikosaeder* származnak.

(2)

$$n=4,\ l=\frac{2m}{4}.\ \text{Ha } m=3 \text{ akkor } l=6$$

s így a *hexaeder* létesül.

(3)

$$n=5,\ l=\frac{4m}{10-3m}.\ \text{Ha } m=3 \text{ akkor } l=12$$

s ygy a *dodekaeder* keletkezik.

Minthogy $n=6$ esetében

$$l=\frac{m}{3-m},$$

s így m-nek nem adhatunk elfogadható értéket; még kevésbé akkor, ha $n>6$, tehát csakis ezek a polyederek lehetségesek.

Ezek az ú. n. *Plato*-féle testek, a mennyiben *Timaeus* és *Euclides* is *de anima mundi* czímű munkákban tétetik róluk említés. Róluk szól *Euclides* is (Elementa XIII.) és valószínű, hogy ismeretük a pythagoraeusokra vezethető vissza.

Ha a felsorolt testek oldallapjai egybevágó szabályos sokszögek, tehát testszögleteik is egybevágóak, akkor ezek a testek *szabályosak.* Mint azt az alábbi táblázat mutatja, megvan köztük a reciprocitás, a mennyiben az oktaederrel szembe helyezhető a hexaeder, a dodekaederrel szembe az ikosaeder, a teraeder önönmagának a conjugáltja.

A test neve	n	m	l	e	c
Tetraeder	3	3	4	6	4
Oktaeder	3	4	8	12	6
Hexaeder	4	3	6	12	8
Ikosaeder	3	5	20	30	12
Dodekaeder	5	3	12	30	20

A szabályos testekről elmondottakra a középiskolai tanítás is kiterjeszkedik, s ha itt tárgyaltuk, akkor ez csak a teljesség okáért történt.

10. *A convex polyederek lapjainak szögösszege* az eddigiek alapján könnyen megállapítható. A derékszöget egységül véve, az n-oldalú sokszög szögösszege $=2n-4$. Ha tehát a polyeder oldallapjai közt $n,\ n',\ n'',\ \ldots$-oldalú sokszögek vannak, a keresett szögösszeg:

$$(2n-4)+(2n'-4)+(2n''-4)+\ldots$$

Ebben az összegben szám szerint l tag szerepelvén, tehát az így írható:

$$2(n+n'+n''+\ldots)-4l.$$

Minthogy minden él két laphoz tartozik, tehát

$$n+n'+n''+\ldots=2e$$

s így a szögösszeg $=4(e-l)$. *Euler* tétele szerint azonban

$$e-l=c-2$$

tehát a szögösszeg $=4(c-2)$.

Ezt tétel alakjában így fejezhetjük ki: *ha a derékszöget vesszük szögegységül, akkor minden convex polyederen az oldallapok szögösszege* 4*–szer akkora, mint a* 2*–vel kevesbített csúcsok száma.*

E szerint a platonikus testek lapjainak szögösszege a táblázat szerinti sorrendben $8,\ 16,\ 24,\ 40,\ 72$ rectus. Ezekből az adatokból megállapíthatók a szabályos platonikus testek testszögleteiben az oldalak szögösszegei.