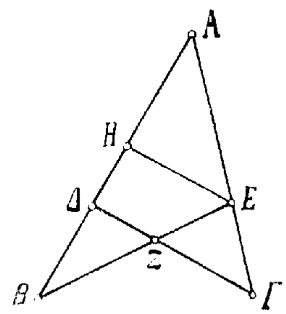
Ptolemaios 3.

Az "Almagest".

A X. fejezet egy nagyon egyszerű készüléket ír le, mely a Nap magasságának meghatározására szolgál annak delelésekor.

A XI. fejezet, melynek czíme körülbelül ez: "Bevezető tételek a gömbi tárgyalásokhoz" ismét kiválóan fontos és érdekes tételeket vezet le. Az első ezek közül így szól: ha két (AB és $A\Gamma$) egyeneshez más kettőt (BE és $\Gamma\Delta$) húzunk, melyek egymást Z pontban metszik, akkor ΓA és AE aránya $\Gamma\Delta$ és $Z\Delta$ meg ZB és BE arányából tevődik össze.



Ez azt jelenti, hogy

$$\frac{\Gamma A}{AE} = \frac{\Gamma\Delta}{Z\Delta} \cdot \frac{ZB}{BE}, \tag{1}$$

a miből:

$$AE \cdot \Gamma\Delta \cdot ZB = \Gamma A \cdot Z\Delta \cdot BE.$$

Ptolemaios a tétel bizonyítását is adja.
Meghúzza a $\Gamma\Delta$-val párhuzamos EH segédvonalat, miáltal ezeket az aránylatokat kapja:

$$\Gamma A : EA = \Gamma\Delta : EH$$

és

$$BZ : BE = Z\Delta : EH.$$

Ez aránylatokból

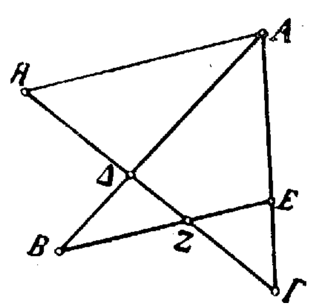
$$EH = \frac{EA \cdot \Gamma\Delta}{\Gamma\Delta}$$

és

$$EH = \frac{BE \cdot Z\Delta}{BZ},$$

$$\frac{EA \cdot \Gamma\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{BE \cdot Z\Delta}{BZ}$$

a miből rendezés után máris megkapjuk a bebizonyítandó tételt.



Ptolemaios ugyanezekre az egyenesekre hasonló módon (ez esetben az A pontból a BE-vel párhuzamosan vont AH segédvonal révén) egy másik tételt vezet le:

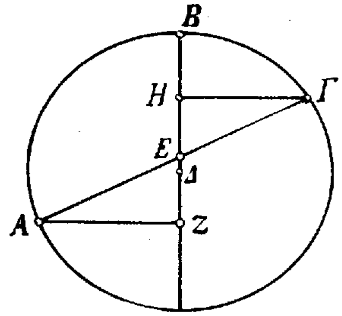
$$\frac{\Gamma E}{EA} = \frac{\Gamma Z}{\Delta Z} \cdot \frac{\Delta B}{BA} \tag{2}$$

vagy:

$$EA \cdot \Gamma Z \cdot \Delta B = \Gamma E \cdot \Delta Z \cdot BA.$$

Egy harmadik levezetése a következő: legyen egy kör középpontja Δ és a kör kerületén három pont: A, B és Γ. Kössük össze A és Γ pontokat és vonjuk meg B és Δ pontokon át az átmérőt. E két vonal E pontban metszi egymást. Rajzoljuk meg az A és Γ pontokból az átmérőre bocsátott AZ és ΓH merőlegeseket; ekkor

$$AZ : \Gamma H = AE : E\Gamma.$$



"De ugyanaz az arány van AZ és ΓH között, mint az AB kétszeres ívéhez tartozó húr és a $B\Gamma$ kétszeres ívéhez tartozó húr között. Mert a merőlegesek e húrok e. Tehát az arány AE és $E\Gamma$ között ugyanaz, mint az AB kétszeres ívéhez tartozó húr és a Γ kétszeres ívéhez tartozó húr között". (3)

Nem szabad többé elsiklanunk e kifejezés fölött, mellyel a mathematika történetében immár másodszor találkozunk: *a kétszeres ívhez tartozó húr;* első ízben a Menelaos-féle tételnek gömbháromszögre való kiterjesztésénél tűnt fel (K. M. L. IX. évf. 222. l.). Tudjuk, hogy a kör sugarához viszonyítva ennek a *húrnak a fele* nem egyéb, mint *a húrhoz tartozó középponti szög felének a sinusa.* Ennélfogva nem túlságos merész az az állítás, hogy a goniometria lényege már a görögök mathematikájában bukkan fel és hogy inkább csak a szavak, az elnevezések hiánya miatt nem ismerjük fel rögtön, első pillantásra.

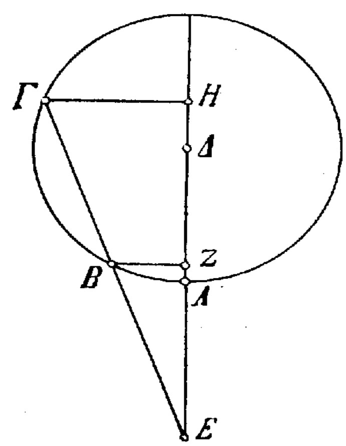
A legutóbb tárgyalt aránylat mai jelöléseinkkel tehát ez:

$$AE : E\Gamma = \sin\widehat{AB} : \sin\widehat{B\Gamma}.$$

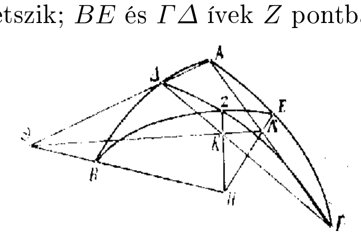
A következő tételt arra az esetre bizonyítja be, a mikor az E pont a körön kívül esik: ekkor "a ΓA kétszeres ívéhez tartozó húr úgy aránylik az AB kétszeres ívéhez tartozó húrhoz. mint ΓE az EB-hoz" ...(4)

vagyis:

$$\sin\widehat{\Gamma A} : \sin\widehat{AB} = \Gamma E : EB.$$



Ezekkel a tételekkel most már követhetjük Ptolemaiost *gömbháromszögtani* fejtegetéseibe is. Ezeket így vezeti be: rajzoljunk egy gömb felületére különböző íveket (ld. ábra), melyek legnagyobb körökhöz tartoznak; legyenek ezek AB és $A\Gamma$ ívek, melyek a BE és $\Gamma\Delta$ íveket metszik; BE és $\Gamma\Delta$ ívek Z pontban metszik egymást.



Ekkor "a ΓE kétszeres ívéhez tartozó húr aránya az EA kétszeres ívéhez tartozó húrhoz összetevődik a ΓZ kétszeres ívéhez tartozó húrnak meg a $Z\Delta$ kétszeres ívéhez tartozó húrnak arányából és a ΔB kétszeres ívéhez tartozó húrnak meg a BA kétszeres ívéhez tartozó húrnak arányából."

"Mert legyen H a gömb középpontja és húzzuk meg e pontból a B, Z és E pontokhoz, melyek ugyanegy körön feküsznek, az HB, HZ és HE egyeneseket. Húzzuk meg az $A\Delta$ egyenest, a mely meghosszabbítva HB meghosszabbítását Θ pontban metszi. Húzzuk meg a $\Delta\Gamma$ és $A\Gamma$ húrokat, melyek megfelelően HZ-t K pontban és HE-t A pontban metszik. A Θ, K és A pontok egy egyenesben feküsznek. Ugyanis mind a három egyidejűleg két síkban fekszik: az $A\Gamma\Delta$ háromszög és a BZE kör síkjában. Így azután a $\Theta\Delta$ és $\Gamma\Delta$ egyenesek K pontban metszik egymást. Ennélfogva:

$$\frac{\Gamma\Delta}{\Delta A} = \frac{\Gamma K}{K\Delta} \cdot \frac{\Delta\Theta}{\Theta A}.$$ [1]

De a miképpen ΓA aránylik ΔA-hoz, úgy aránylik ΓE kétszeres ívéhez tartozó húr az EA kétszeres ívéhez tartozó húrhoz.[2] És ΓK úgy aránylik $K\Delta$-hez, mint a ΓZ kétszeres ívéhez tartozó húr a $Z\Delta$ kétszeres ívéhez tartozó húrhoz. De még $\Delta\Theta$ úgy aránylik Θ-hoz, mint a ΔB kétszeres ívéhez tartozó húr a BA kétszeres ívéhez tartozó húrhoz."[3] Ezekből pedig már következik az a tétel, melyet Ptolemaios e gömbháromszögtani fejtegetés elején kimondott és a mely mai goniometriai jelöléseinkkel ily alakú:

$$\frac{\sin \Gamma E}{\sin EA} = \frac{\sin \Gamma Z}{\sin Z\Delta} \cdot \frac{\sin \Delta B}{\sin BA} \tag{5}$$

A fejezet végén még egy hasonló összefüggés van:

$$\frac{\sin \Gamma A}{\sin EA} = \frac{\sin \Gamma\Delta}{\sin \Delta Z} \cdot \frac{\sin ZB}{\sin BE} \tag{6}$$

[1] A (2) egyenlet alapján; l. 150. lap.
[2] A (3) tétel alapján; l. 151. lap.
[3] A (4) tétel alapján; l. 151. lap.