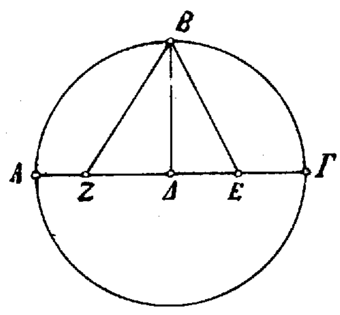
Ptolemaios.

Az „Almagest".

A IX. fejezet czíme: *A körbe írt egyenesek értékéről.* Rendkívül érdekes és fontos fejezet ez, mert nem egyéb, mint egy rendszeres goniometriai táblázat, melyet a kiszámításához szükséges elméleti vonatkozások előznek meg. Minden hosszadalmas magyarázat helyett legczélszerűbb magát a szerzőt megszólaltatni:

„A gyakorlat könnyebbsége végett egy táblázatot állítunk össze ez egyenesek értékéről, miközben a kerületet 360 fokra osztjuk fel. Táblázatunknak összes ívei fél fokkal növekednek, állandóan, és mi megadjuk ez ívek mindegyikéhez a húr értékét, azzal a föltevéssel, hogy az átmérőt 120 részre osztottuk fel. A használat révén látni fogjuk, hogy ez a szám a legkényelmesebb, melyet választani lehet. Megmutatjuk előbb, miképpen készül oly tételek lehető legkisebb számának segítségével, melyek mindig ugyanazok, általános és pontos módszer amaz értékek meghatározására. Nem szorítkozunk azonban erre a táblázatra, a melyből ez értékeket kivehetjük, az elmélet ismerete nélkül, de megkönnyítjük az eszközöket, hogy azokat kipróbáljuk és igazoljuk, megadva a szerkesztési módszereket. Általánosságban a hatvanas számozást használjuk, hogy elkerüljük a törtek bonyodalmasságát; és a szorzásokban és osztásokban mindig a legmegközelítőbb eredményeket vesszük, oly módon, hogy az, a mit elhanyagolunk, nem zavarja meg azok pontosságát."

Ezek után minden átmenet nélkül meghatározza a körbe írt szabályos ötszög és szabályos tízszög oldalát, oly módon, hogy a kör sugarának E felező pontjából (1. ábra) az EB hosszúságot az átmérőre leforgatja EZ-be és kimutatja, hogy $Z\Delta$ a szabályos tízszög és ZB a szabályos ötszög oldala.

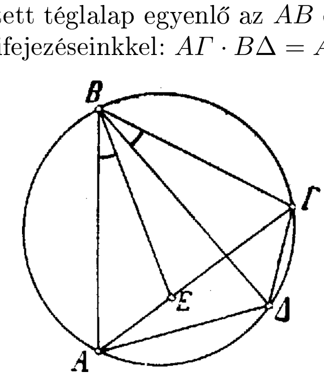


Most következik a legérdekesebb részek egyike: a goniometriai értékek kiszámítása. Ez a rész mindenekfölött arra érdemes, hogy szó szerint ismertessük e helyen:

„Miután, mint mondottam, a kör átmérőjét felosztottuk 120 részre, ΔE, mely a sugár fele, 30 résznyi és négyzete 900. A $B\Delta$ sugár, 60 résznyi és négyzete 3600; de EB, vagyis EZ négyzete 4500: következőleg ennek az EZ vonalnak hossza $\xi\overline{\zeta}\delta'\varepsilon''$ (67 egész $\dfrac{4}{60}$ és $\dfrac{55}{3600}$ rész) és így ΔZ-nek a hossza $\lambda\overline{\zeta}\delta'\nu\varepsilon''$ (37 egész $\dfrac{4}{60}$ és $\dfrac{55}{3600}$ rész). Továbbá, mivel ΔZ maga $3\overline{7}\ 4'55''$, négyzete $137\overline{5}\ 4'15''$; de ΔB négyzete 3600 és e két négyzet összege egyenlő BZ négyzetével, mely ennélfogva $497\overline{5}\ 4'15''$, tehát BZ maga $7\overline{0}\ 32'3''$. Nyilvánvaló, hogy a szabályos hatszög oldala, mely 60°-ú ívet befog és mely a sugárral egyenlő, 60 részt foglal magában. Éppen így a négyzet oldalának, mely a kerületnek 90°-ját fogja be, a négyzete kétszerese a sugár négyzetének; és a háromszög oldalának, mely 120° -ot fog be, a négyzete háromszorosa a sugár négyzetének. De a sugár négyzete 3600 és így a négyzet oldalának négyzete 7200, a háromszög oldaláé pedig 10800. Ennélfogva az az oldal, mely a kerületnek 90°-ját fogja be, $8\overline{4}\ 51'10''$ és az az oldal, mely 120° -ot fog be, $10\overline{3}\ 55'23''$ résznyi hosszú."

Ezek után hasonló módon kiszámitja még a 144°-ú ívhez tartorzó húrt, melyet $11\overline{4}\ 7'37''$ hosszúnak talál, azután egyéb húrok kiszámítása czéljából áttér a körbe írt négyszög tárgyalására és ennek folyamán levezeti azt a nevezetes tételt, mely Ptolemaios nevével kapcsolatosan ismeretes.

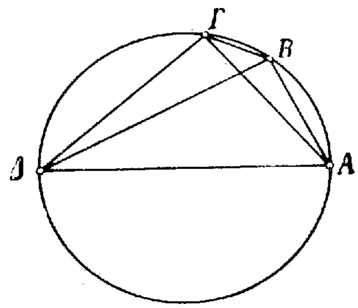
E tétel is arra érdemes mathemtikai fontosságánál és történeti érdekességénél fogva, hogy levezetését egész terjedelmében közöljük: „Legyen a körbe írt tetszőleges négyszög $AB\Gamma\Delta$; húzzuk meg az átlóit: $A\Gamma$ és $B\Delta$. Be kell bizonyítani, hogy az $A\Gamma$ és $B\Delta$ vonalokkal megszerkesztett téglalap egyenlő az AB és $\Gamma\Delta$ meg az $A\Delta$ és $B\Gamma$ szembenfekvő oldalakkal megszerkesztett téglalapokkal (mai kifejezéseinkkel: $A\Gamma \cdot B\Delta = AB \cdot \Gamma\Delta + A\Delta \cdot B\Gamma$).

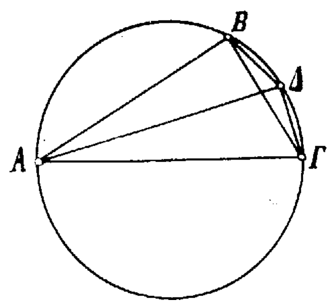


Legyen ABE szög akkora, mint $\Delta B\Gamma$. Ha mindegyikhez hozzácsatoljuk a közös $EB\Delta$ szöget, az $AB\Delta$ szög akkora lesz, mint az $EB\Gamma$ szög. De $B\Delta A$ és $B\Gamma E$ szögek egyenlők egymással, mert ugyanazon az íven nyugvó kerületi szögek.

Tehát az $AB\Delta$ és $B\Gamma E$ háromszögek egyenlő szögűek. Ennélfogva $B\Gamma$ úgy aránylik a ΓE-hoz, mint $B\Delta$ a ΔA-hoz. Így $B\Gamma A\Delta$ (értsd: $B\Gamma \cdot A\Delta$) annyi, mint $B\Delta \cdot \Gamma E$. Továbbá, mivel ABE szög egyenlő $\Delta B\Gamma$ szöggel és BAE szög egyenlő $B\Delta\Gamma$ szöggel, az ABE és $B\Gamma\Delta$ háromszögek is egyenlő szögűek; ennélfogva BA úgy aránylik az AE-hez, mint $B\Delta$ a $\Delta\Gamma$-hoz. Így $BA \cdot \Delta\Gamma$ annyi, mint $B\Delta \cdot AE$. Kimutattuk tehát, hogy $B\Gamma \cdot A\Delta$ akkora, mint $B\Delta \cdot \Gamma E$. Következőleg az egész $A\Gamma B\Delta$ négyszög akkora, mint az $AB\Delta\Gamma$ és $A\Delta B\Gamma$ négyszögek. Ezt kellett kimutatni."

Hogy mi czélból volt szüksége Ptolemaiosnak erre a tételre, az a következőkből derül ki. A körbe írt négyszög egyik oldalának a kör átmérőjét ($A\Delta$) veszi, másik két oldalának pedig oly húrokat, melyeket már ismer, pl. AB és $A\Gamma$ húrokat. Mivel tehát most már az $AB\Gamma\Delta$ húrnégyszögnek két átlóját és három oldalát ismeri, kiszámíthatja a $B\Gamma$ ívhez tartozó $B\Gamma$ húr hosszát is. Így egyebek között a 72°-ú és 12°-ú ívekhez tartozó húrokból a 12°-ú ívhez tartozó húrt.





Továbbá meg tudja határozni egy kis segédszerkesztéssel a $B\Gamma$ ívhez tartozó ismert $B\Gamma$ húrból a $\frac{B\Gamma}{2}$ ívhez tartozó $\Delta\Gamma$ húr nagyságát is. „Így például a 12°-ú szöghöz tartozó húrból megtaláljuk a 6°-ú, a 3°-ú, az $1\frac{1}{2}^\circ$-ú és a $\frac{3}{4}^\circ$-ú ívhez tartozó húrokat. A számítás által azt találjuk, hogy az $1\frac{1}{2}^\circ$-ú ívhez tartozó húr $\overline{1}\ 34'15''$ és a $\frac{3}{4}^\circ$-hoz tartozó húr $0\ 47'8''$."

Végre pedig, miután két szöghöz tartozó húrokból kiszámította az e szögek összegéhez tartozó húr nagyságát, a nagyon kis szögekhez: az 1°– és $\frac{1}{2}^\circ$-ú szögekhez tartozó húrokat határozza meg, ez esetben már egyszerű arányosság révén.

És most mindezek után következik maga a táblázat, az ókori mathematikai munkálkodásnak egyik legérdekesebb és legbecsesebb gyümölcse. Mivel az Almagest kiadásához meglehetősen ritkán lehet csak hozzá férni, a táblázat pedig nagyon is arra érdemes, hogy megismerjük, nem tartom fölösleges dolognak, hogy egyes töredékeit e helyen bemutassam. Itt közlöm a táblázat kezdetét, mellette a magyar fordítását, illetőleg mai számainkkal való értelmezését:

KANONION ΤΩΝ ΕΝ ΚΥΚΛΩ ΕΥΘΕΙΩΝ								
ΠΕΡΙΦΕ-ΡΕΙΩΝ		ΕΥΘΕΙΩΝ			ΕΞΗΚΟΣΤΩΝ			
Μοιρῶν		Μ.	Π.	Δ.	Μ.	Π.	Δ.	Τ.
ο̃	c	ο̃	λα	κε	ο̃	α	β	ν
α	ο̃	α	β	ν	ο̃	α	β	ν
α	c	α	λδ	ιε	ο̃	α	β	ν
β	ο̃	β	ε	μ	ο̃	α	β	ν
β	c	β	λζ	δ	ο̃	α	β	μη
γ	ο̃	γ	η	κη	ο̃	α	β	μη
γ	c	γ	λθ	νβ	ο̃	α	β	μη
δ	ο̃	δ	ια	ιϛ	ο̃	α	β	μζ
δ	c	δ	μβ	μ	ο̃	α	β	μζ
ε	ο̃	ε	ιδ	δ	ο̃	α	β	μϛ
ε	c	ε	με	κζ	ο̃	α	β	με
ϛ	ο̃	ϛ	ιϛ	μθ	ο̃	α	β	μδ
ϛ	c	ϛ	μη	ια	ο̃	α	β	μγ
ζ	ο̃	ζ	ιθ	λγ	ο̃	α	β	μβ

A körbe irt húrok táblázata								
Ivek		Húrok			Az $1'$-nyi különbségek			
fok	perc	részek	$\frac{1}{60}$ részek	$\frac{1}{3600}$ részek	részek	$\frac{1}{60}$ részek	$\frac{1}{3600}$ részek	$\frac{1}{216000}$ részek
0	30	0	31	25	0	1	2	50
1	0	1	2	50	0	1	2	50
1	30	1	34	15	0	1	2	50
2	0	2	5	40	0	1	2	50
2	30	2	37	4	0	1	2	48
3	0	3	8	28	0	1	2	48
3	30	3	39	52	0	1	2	48
4	0	4	11	16	0	1	2	47
4	30	4	42	40	0	1	2	47
5	0	5	14	4	0	1	2	46
5	30	5	45	27	0	1	2	45
6	0	6	16	49	0	1	2	44
6	30	6	48	11	0	1	2	43
7	0	7	19	33	0	1	2	42

A második rovatban találhat c jel, mint a görög α betű fele, $\frac{1}{2}$ fokot jelent.

Nem tartjuk érdektelen vagy hiábavaló dolognak, ha kissé mélyebben bocsátkozunk e táblázat fejtegetésébe és egy-egy adatának utána számításába. A táblázat első sora megadja a $0°30'$-nyi ívhez tartozó húr nagyságát az átmérő $\frac{1}{120}$ részeiben kifejezve, mint a hogy minden sor az általános φ szöghöz tartozó húr:

$$a = 2r \cdot \sin\frac{\varphi}{2} = 120 \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$$

nagyságát adja meg. Ennélfogva az első sorbeli húr értéke:

$$a = 120°30' \sin° 15' = 120 \cdot 0{,}0043635 =$$

$$= 0{,}52362 = 31\left(\frac{1}{60}\right) + 25\left(\frac{1}{36000}\right),$$

tehát csakugyan $\delta\lambda\alpha'\chi\varepsilon''$, a mint Ptolemaios a szövegben jelölte.

Mivel pedig látja, hogy kis szögekhez tartozó húrok korlátolt pontossággal arányosak a szögekkel (hiszen még a $2°$-ú szöghöz tartozó húr $\overline{2}\ 5'40''$ is kétszer akkora, mint az $2°$-ú szöghöz tartozó húr: $\overline{1}\ 2'50''$), bátran térhet át a $0°30'$-nél kisebb szögekhez tartozó húrokra egyszerű arányosság útján. Ha tehát a $0°30'$-nyi szöghöz tartozó húr: $\overline{0}\ 31'25'' = 0{,}52362$ értékét elosztja 30-cal, megkapja az $1'$-nyi szöghöz tartozó húr nagyságát ez értékben:

$$0{,}017454 = 1\left(\frac{1}{60}\right) + 2\left(\frac{1}{3600}\right) + 50\left(\frac{1}{216000}\right),$$

a mint azt a táblázatban csakugyan így meg is találjuk.

Ugyane rovat többi sorai pedig szintén arányos részek, melyek szerint a kis szögkülönbségekhez tartozó húrkülönbségek korlátolt pontossággal változnak. Ezek tehát egyszerűen az $1'$-hez tartozó arányos részek, mint a milyeneket a mi logarithmus-könyveinkben is találunk.

Ptolemaios táblázatát tovább kisérve, még a következő nevezetesebb szögekhez tartozó húrokat említhetjük meg:

$$\| \ \xi \mid \delta \ \| \ \xi \mid \delta \mid \delta \ \| \ \delta \mid \delta \mid \nu\delta \mid \varkappa\alpha \ \| \qquad \| \ 60 \mid 0 \ \| \ 60 \mid 0 \mid 0 \ \| \ 0 \mid 0 \mid 54 \mid 21 \ \|$$

mert a $60°$-ú szöghöz tartozó húr akkora, mint a sugár, tehát 60 egység; érdekesebb sor továbbá ez:

$$\| \zeta \mid \delta \| \pi\delta \mid \nu\alpha \mid \iota \| \delta \mid \delta \mid \mu\delta \mid \varkappa \| \qquad \| 90 \mid 0 \| 84 \mid 51 \mid 10 \| 0 \mid 0 \mid 44 \mid 20 \|$$

mert a 90°-ú szöghöz tartozó húrnak, vagyis a körbe irt négyzet oldalának nagysága

$$r\sqrt{2} = 60 \cdot 1,414213 = 84 + 51\left(\frac{1}{60}\right) + 10\left(\frac{1}{3600}\right).$$

Végre pedig a táblázat utolsó sora ez:

$$\| \varrho\pi \mid \delta \| \varrho\varkappa \mid \delta \mid \delta \| \delta \mid \delta \mid \delta \mid \delta \| \qquad \| 180 \mid 0 \| 120 \mid 0 \mid 10 \| 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \|$$

mert a 180°-ú szöghöz tartozó húr maga az átmérő, vagyis 120 egység.

Mindezekből azt látjuk, hogy Ptolemaios táblázatának tartalma nem egyéb, mint a szögek sinusai, melyeknek értékei az iskolai logarithmus-könyvekben rendesen a II. táblázatban megvannak. Hiszen a Ptolemaios-féle táblázatból minden szög sinusát lehet kiszámitani: Ptolemaios-féle adatot csak el kell osztani 120-szal és megvan az illető szög felének a sinusa.