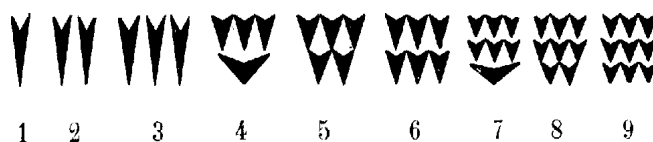


Ma, mikor a legnagyobb és legbonyolódottabb számokat is nagy könnyűséggel, szinte gépiesen leírjuk és azokkal számolunk, nem igen gondolunk arra, hogy csak mennyi fáradsággal jutottak nagytehetségű férfiak évszázadokon át ama eredményekre, melyekkel ma az elemi tanuló is elbánik. És nem is a számolási műveletek, hanem ennél még egyszerűbb dolog: a számírás maga ment ily hosszú, történeti fejlődésen keresztül. Történeti adatok, a vad népeknél még ma is dívó, de a gyermekeknél is tapasztalható szokások azt bizonyítják, hogy az egész emberiség is csak az ujjszámolást használta fejlődésének gyermekkorában.

Hogy valamely nép milyen ügyességet ért el a számolásban, az már aztán szellemi képességétől, leleményességétől és kiválóan attól függött, mennyire volt rászorulva a számolásra. A számok ujjakkal való jelölésének egyik fő bizonyítéka az, hogy az 5, mint az egyik kéz ujjainak száma és a 10, mint az összes ujjak száma, mindig kiváló szerepet játszik: rendszeren külön neve van, a melyből az utána következő számok neve fejlődik. Így az indiánok egyik törzse az 5-öt egyszerűen így nevezi: az egész kéz, a 6-ot pedig így: a másik kézből is egy, s. i. t.; a 10 egyszerűen: két kéz.

Nagy lépést tettek már a népek művelődésük fejlődésében, mikor a számjegyeket fába vagy más anyagba kezdték bevésni és még nagyobb, mikor a számokat írták.

A számok jelölésének legközvetlenebb módja mindenestre az volt, hogy annyi vonást rajzoltak, a hány egység a számban van, tehát *I*, *II*, *III*, *IIII*. A vonások kétségtelenül az ujjak képei. Ez a mód tehát egyszerűen a számok egységeinek felrajzolása; alkalmazták pedig a rómaiak, körülbelül Kr. e. 350-ig a görögök és ősidőktől kezdve a babyloniak; az utóbbiak vonások helyett írásmódjukhoz híven ékeket használtak ily csoportosításban:



Nagyobb számnál azonban e jelölés nem igen czélszerű, mert a szám olvasásánál mindannyiszor meg kellene olvasni az összes egységeket, ezért az említett ó-kori népek is csak bizonyos határig rajzolták fel az egységeket és egyes nagyobb számokat új jellel jelölték meg, így a rómaiak már az 5-öt e jellel: *V*, a görögök ugyancsak az 5-öt *II* betűvel, a babyloniak a 10-nek adtak nyílhegy alakú, új jelet.

A rómaiak a nagyobb egységek jeleit általában az ujjak és a kezek különböző helyzeteinek utánzása által képezték. E jelek néha önkéntelenül, néha kissé erőltetve egyes római betűk alakját tüntetik fel:



E jelek értelme ez volt: $V = 5$, $X = 10$, $L = 50$, $C = 100$, $D = 500$; az M viszont már az 1000 latin nevének (mille) kezdőbetűje. Ily módon jelölték meg a görögök is az összes nagyobb egységeket görög nevük kezdőbetűjével: $II = 5$ (pente); $\Delta = 10$ (deka); $H = 100$ (hekaton); $X = 1000$ (kilioi); $M = 10,000$ (mirioi).

A babyloniaknál a százaz egy függélyes és egy vízszintes ék volt egymás mellett; az ezres = 10×100 értelmében a tízes (nyílhegy) és a százaz (függélyes és vízszintes ék) jeléből, végre pedig a tízezres = $10 \times 10 \times 100$ értelmében két tízes (melyek szorzóként szerepelnek) és a százaz jeléből állott; az összes egységek tehát ezek voltak:



A római számokat még manapság is alkalmazzuk. Ahogyan a latin műveltségéből fejlődött ki és azon alapszik a mi műveltségünk, úgy a történeti folytonosság révén a római számoknak is fontos szerepük van még mai számjelölésünkben. Ezért érdemes tehát a római számrendszer szerkezetét kissé behatóbban megbeszelnünk. A római számrendszerben már a szám helyének is szerepe jut bizonyos fokig: ha a kisebb szám a nagyobb után áll, ehhez hozzáadandó, ha előtte áll, levonandó belőle; így $XI = 11(10 + 1)$ és $IX = 9(10 - 1)$. Levonandónak azonban rendszerint csak egyjegyű számot vettek; így pl. a $IIX = 8$ jelölés nem volt szokásban. – A nagyobb egységek jelölése kissé nehézkes volt: az $M = 1000$ volt a legnagyobb értékű önálló jegy. Ha több ezrest akartak jelölni, annyi M -et írtak egymás mellé, a hány ezres volt a számban; ily jelölés azonban csak legfeljebb négy ezresig volt áttekinthető, az öt ezrest már így jelölték: VM ; itt tehát az V jelet az ezres szorzójaként és nem kivonandóként kellett olvasni; kétértelműség mindenestre volt e jelölésben, a mennyiben $995 = 1000 - 5$ jelölésére ugyancsak az VM szolgálhatott. Ha a szám fölé vízszintes vonást tettek, ez az illető szám 1000-szeresét jelentette; így tehát: $\overline{X} = 10.000$, $\overline{L} = 50.000$, $\overline{C} = 100.000$, $\overline{CC} = 200.000$; ha

pedig a számot egy alul nyílt négyszögbe foglalták, a szám 100.000-szerese származott, például: $\overline{X} = 10 \times 100.000 = 1.000.000$, $\overline{XV} = 1.500.000$, $\overline{CL} = 15.000.000$.

A görög számrendszerben csak az összeadás dívott; az összeg jelölésére a számjegyeket egymás mellé írták, pl.: $\Delta II = 15$, $HH\Delta = 210$. Ha valamely számnak 5-szörösét kellett írni, rövidítés kedvéért a megfelelő számot alul nyílt négyszögbe helyezték, pl.: $\overline{\Delta} = 50$, $\overline{H} = 500$, $\overline{X} = 5000$, úgy, hogy: $HHH\overline{\Delta}III = 357$, $X\overline{H}HH = 1700$.

Rendkívüli érdekességénél fogva említésre méltó e helyen az egyiptomi számjelzés is, mert elve ugyanaz, mint a rómaié, görögé és babylonié: egy ideig az egységek számainak rajzolásával, majd pedig nagyobb egységek számára új jelekkel fejezte ki a számokat. A mint az írás kétféle volt az egyiptomiaknál: a hieroglifek a templomok falain és egyéb épületeken és a hieratikus írás mint a papok köznapi írása, úgy a számok jelölése is kétféle módon történt. A hieroglif írásban mind a 9 első számjegyet az egységek számának megfelelő vonásokkal jelölték, csak a 10-nek jutott ez az új jel: \square ; a 20, 30, ... 80, 90 számokat annyi ily jellel ábrázolták, a hány tízest az illető szám tartalmazott. Új jele volt ismét a 100-nak, az 1000-nak, a 10.000-nak s. i. t. minden tízes egységnek.

A hieroglif írásból fejlődött, illetőleg torzult el a hieratikus írás, melyben az egyes számjegyeknek többnyire már külön jel jut, de ezek is idők folyamán és helyek szerint néha változnak; ezek szerint:

	1			
	2		+	10
	3		X	11
	4	⊕	+	15
V^	5	⊕	^	20
V^	6	⊕	-	100
=	8		%	1000

Nem lehetetlen, hogy a római V (5) és X (10) számjegyek a megfelelő egyiptomi jelekből származtak.

A számok jelölésének egy másik módja az, hogy az *abc* betűi jelentették rendre a különböző számokat; ezt a módot a zsidók és a Kr. e. IV. századtól kezdve a görögök is alkalmazták. Mindkettőnél az *abc* első 10 betűje rendre az első 10 számot jelöli, a 11. betű értéke 20, a 12-iké 30, a 13-iké 40, a 19-iké 100, a 20-iké 200, s. i. t.

Ha a betűk kifogytak, az *abc*-t újra kezdték, de valami jelet tettek az illető betűhöz, mely ily módon most már nagyobb egységet jelentett. Így pl. a zsidó írásban \aleph (alef) = 1, \beth (bét) = 2 volt, míg ellenben fönt két ponttal e számok ezerszeresét jelentették, tehát: 1000, illetve 2000. A görög írásból néhány példa a következő: $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, $\vartheta = 9$, $\iota = 10$, $\chi = 20$, $\pi = 80$, $\rho = 100$, $\sigma = 200$, $\omega = 800$. Ha kis vesszőt tettek a betű alá, ez annyi ezrest jelentett, mint a hány egységet előbb, pl.

$$\alpha = 1000, \beta = 2000, \vartheta = 9000.$$

A 10.000 számára e rendszerben is a *M* vagy *Mo* betűket (mint a myrioi kezdőbetűi) használták; a 10.000 többszöröseinek jelölésére a *M* fölé vagy elé a szorzót írták, pl.:

$$\overset{\beta}{M} = \beta M = 20.000, \overset{\iota}{M} = \iota M = 1000.000.$$

E többé-kevésbé nehézkes jelölésekkel szemben áll az a kétségkívül szellemes és nagyfokú leleményességre valló gondolat, mely a miáltalunk mai napság használt tízes számrendszer alapja. E gondolat az, hogy nagyobb egységek számára is ugyanaz a jel szolgál, mint a kisebb egységek számára, de más helyen álljon és így helye által kapja meg az értékét: a "2" jel kettőt jelent, de 25-ben már húszat, 235-ben kétszázat, 2473-ban pedig kétezret jelent, mert mindegyik számcsoportban más és más helyen áll.

A helyérték gondolatát, úgy látszik, a babyloniak eszelték ki először: 1854-ben Loftus angol geológus az Eufrát melletti Szenkerek (a régi Larzak) városánál két kis, égetett agyagból való táblát talált, mindkét oldaluk tele ékírással. Szakértők azt állapították meg, hogy a táblák a Kr. e. 2300 és 1600 évek közötti korszakból valók. A táblákon bizonyos rendszeres számtáblázatok voltak, melyekből Hincks, angol assziriológus egy igen érdekes, a helyérték elvén fölépülő számjelölési rendszert fejtett meg. A jelölés ez volt: az 1 ugyanaz az ék, a 10 ugyanaz a nyílhegyforma jel, a melyeket már előbb megismertünk. A 60-at a táblák ismét az 1-et jelentő ékkel jelölik, de bal felé a második helyre teszik s így értéke a helyénél fogva 60. Ennélfogva

$$\begin{array}{l}
\blacktriangledown \blacktriangledown \quad 61\text{-et jelent } 1(60)+1 \text{ alapján} \\
\blacktriangledown \blacktriangledown \blacktriangledown \quad = 62, \\
\blacktriangledown \blacktriangledown \blacktriangledown \blacktriangledown \quad = 63, \\
\blacktriangledown \blacktriangledown \blacktriangledown \quad = 70.
\end{array}$$

A helyérték elvét még tovább is folytatták: az ék balfelé a harmadik helyen már 3600-at jelent; ennek folytán



tehát $1(3600) + 1(60) + 1$ alapján annyi, mint 3661; ezen a példán pedig:

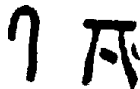
$$\blacktriangledown \blacktriangledown \blacktriangleleft \blacktriangledown \blacktriangledown \blacktriangledown \blacktriangleleft \blacktriangledown \quad = 2(3600) + 36(60) + 21 = 9381$$

azt látjuk, hogy az egyes helyeken egész számcsoportok is állhatnak.

Sokat foglalkoztak a matematikusok azzal a kérdéssel, miért alkottak a babyloniak éppen hatvanas rendszert, holott a tízes rendszer használata közelebb fekvő, mivel tíz ujjunk van, de meg a 10-nek külön jellel való megjelölése is már félig-meddig kiszabhatta az utat a tízes számrendszer fejlődésére. Miért vettek fel a babyloni matematikusok és csillagászok, tehát a papok (mert ezeké volt ez a számjelölés) külön rendszert? Úgy látszik, ez a csillagászattal áll összefüggésben. A papok ugyanis akkortájt az évet 360 nappól állónak hitték és ebből kifolyólag a kört is 360 részre (fokra) osztották, hogy így minden rész egy-egy napnak feleljen meg. A sugár segítségével a kört 6 egyenlő részre tudták már osztani és az ily alapon nyert rész, mely tehát az egész körvonalnak 360-ad részeiből 60-at foglalt magában, lett az egység. Kétségkívül ily módon jutott a 60-as a babyloni számrendszerben ahhoz a kiváló szerephez.

A helyérték elvét azonban nem igen folytatták, azzal a számrendszerrel ugyanis, melyet mi manapság használunk és melyet arabok számrendszernek nevezünk, de helyesebben indusnak kellene nevezni, történeti összefüggésben nincsen.

Az indusok ősidőktől kezdve szintén az *abc* betűivel jelölték meg a 9 egységet, a 9 tízest s í. t. Különböző helyeken és időkben, hol az *abc* betűit sor szerint, hol ismét az illető szám nevének kezdőbetűjét vagy annak bizonyos átalakítását használták a szám jelölésére. Számjelzési rendszerükben tehát hol a hieroglifek, hol a zsidó számjelölés elvére akadunk. Az az egyszerű, de egyszersmind bámulatos gondolat, hogy csakis 9 számalak segítségével fejezzék ki az összes számokat, csak a Kr. u. VII. században található meg. A Kr. u. II. századból való iratok egyikében ezeket a jeleket találták:



1 és 10 kifejezésére.

Itt tehát helyértékről még nincs szó, mert a tízes külön jel. Egy IX. századbéli szanszkrit (ó-indus) iratban azonban a tízes ilyen: **१०**; ez tehát már a helyérték gondolatának nyilvánulása: a १ jel ugyanaz, mint az egyesé, de mivel egy új jel: ०, nulla (zéró) jele, a második helyre tolja, itt már tízest jelent. Most már csak folytatni kellett az elvet: ha a १ jel a második helyre eltolva tízszer többet jelent, akkor két más szám által a harmadik helyre eltolva, újra tízszer többet, tehát százast jelent. Az indus jelölés a babylonival szemben határozott haladást mutat: a szomszédos helyértékek szorzója: 10 az indus rendszerben kisebb és könnyebb szám, mint a babyloni 60; továbbá minden számjegynek 1-től 9-ig meg van a saját alakja, elesik egész számcsoportoknak rajzolása, miáltal a jelölés áttekinthetőbb lesz, végre pedig legfontosabb vívmány az indus számrendszerben a – nulla.

Míg ugyanis a babyloni jelölésben egy egyedül álló ék: **▼** épp úgy jelenthetett 1-et, mint 60-at és 3600-at s az olvasónak leleményességétől függött az, hogy e jelnek helyértékét is kiolvassa a számból (a mi azonban néha teljesen lehetetlen), addig az indus szám a nulla jelével határozottan, minden kétséget kizárva megmutatja, hogy a másik szám pl. a **१०**-ben a १ balra a *második helyen* áll és ennél fogva tízet jelent.

A helyérték elvét kifejtő számrendszer, melyet most már egyszerűen tízes számrendszernek nevezhetünk, gyorsan terjedt el egész Indiában; a számjegyek változtak ugyan itt-ott: a mai 9-esünkhöz hasonló számjegy pl. a maledivi írásban szintén 9-et, de már a devanagiriiban 1-et, az asszámiban pedig 7-et jelentett, a nulla jele viszont azonkívül,

hogy a legtöbb indus írásban az általunk is használt: 0 alakban van meg, néhol ponttá zsugorodott össze, pl. a kasmir írásban, másutt pedig a görög ω -hoz hasonló alakká fejlődött, mint a tamuli írásban, vagy éppen egy igen cizfrán írott nagy H-ra emlékeztető jellé nőtte ki magát, mint pl. a szingaléz nyelvben. A helyértékek elve azonban szigorúan meg volt mindegyik indus nép számrendszerében. Érdekességénél fogva érdemes az indus írások egyikének, pl. a devanagari írásnak számjegyeit közölni. A devanagari nem egy ország vagy nép, hanem a szanszkrit nyelvű könyvek általános szent írása, melyet a benareszi papi iskolában állapítottak meg. A számjegyek ezek:

१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

A Kr. u. VIII. században a keleti arabok már ismerték és felkapták az indusok tízes számrendszerét. Körülbelül ez időből valók az arab számjegyek:

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Az arabok révén került ez írásmód Európába; s ez az oka annak, hogy mai számainkat arab számoknak nevezzük. Európában különösen a nagy tudományú II. Sylvester pápa (mint ilyen 999-1003), ki maga is kiváló matematikus volt, járult hozzá nagyban a tízes számrendszer terjesztéséhez, elsősorban Olasz-, Német- és Franciaországban. De a nevezett pápától és az araboktól függetlenül is megismerkedhettek az európaiak a tízes számrendszerrel a XI. század folyamán azoknak az élénk kereskedelmi összeköttetéseknek révén, melyek, kiválóan Bizáncban mint középpontban, keresztény kereskedők és India között fönnállottak. Az sincs kizárva, hogy misszionáriusok is áthozták Európába a tízes számrendszert egyenesen Indiából. Az új rendszer mindamellettt lassan terjedt: továbbra is sokáig a régi nehézkes, de megszokott római írásmódot használták. Csak az 1200. évről mondhatjuk, hogy a tízes számrendszer teljesen tért hódított magának a keresztény Nyugaton. A gyakorlati életben azonban még akkor is mindig erős tusát kellett vívnia a római számokkal. A XV. században már gyakran találjuk a tízes rendszert kéziratokban az évszámok jelölésére, sőt kereskedők könyveiben is, de okmányokban még igen ritkán. Csak lassan – lassan kezdenek még a kolostorok iskoláiban is a megerősítő ujjszámolásról és a római számokkal való rendkívül bonyolódott számolásról letenni és a XVI. század folyamán beveszik a tízes számokat; kereskedelmi iskolákban és ebből kifolyólag a gyakorlati életben is, már a XV. században megbarátkoztak az új számrendszerrel és számolással, melyet kiválóan olasz számolási módszerek alapján gyakoroltak. A XVI. században használt számjegyek már teljesen azok, melyekkel manapság is élünk, kivéve a kettést, melynek jele még inkább Z, mint 2 és a hetest, melynek jele: \wedge , tehát az a jel, mely az arab írásban a 8-at jelentette.

A XV. században el is dől a római és arab számrendszer illetékességi kérdése: számolásra a tízes számrendszer szolgál, míg ellenben díszesebb, ünnepélyesebb megörökítésekre, továbbá oly számbeli megjelölésekre, melyek számolási műveletekbe nem kerülnek, a római számok maradnak meg. Emléktáblákra, szobrok talapzatára még mai nap is római számjegyekkel írjuk az évszámokat, könyvek köteteit, fejezetek számait még mi is római számokkal jelöljük meg: s érezzük, hogy a római számoknak művelődéstörténeti szerepük bizonyos klasszikus ízt ad.

Tény az, hogy a számrendszerek s számjelölések óriási tömkelegéből csak kettő vívta ki magát a mi műveltségünk körében: általános érvénnyel az arab, részleges érvénnyel a római számok, – mintegy jelezvén művelődésünk kettős, modern és antik alapját.