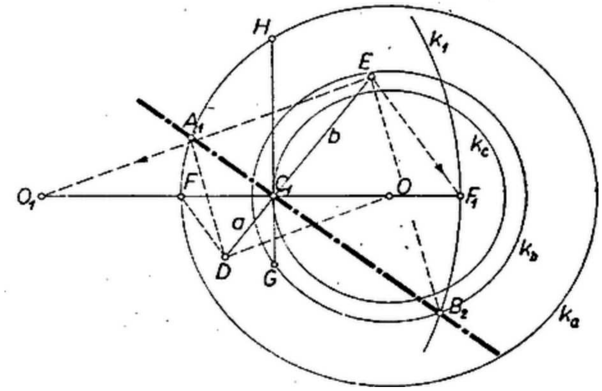
I. megoldás. Legyenek a körök rendre k_a, k_b, k_c, közös középpontjuk O, sugaruk $OA_1 = r_a$, $OB_1 = r_b$ ill. $OC_1 = r_c$; nyilvánvaló, hogy $r_a > r_b > r_c$. A keresett szelő egy pontját tetszés szerint választhatjuk, legyen ez C_1 a k_c-n. C_1 az A_1B_2 szakasz belsejében van, ez az előírt aránnyal együtt azt jelenti, hogy A_1-et C_1-től $b : a$ arányban távolítva, egyszersmind C_1 körül $180°$-kal elforgatva B_2-be jutunk. Eszerint B_2-t k_b-ből azzal a k_1 körrel metszhetjük ki, amely k_a-ból C_1 körüli $180°$ szögű és $b : a$ arányú forgatva nyújtással áll elő.



Ennek alapján a szerkesztés a következő: egy a C_1-en átmenő és C_1O-tól különböző egyenesre C_1 két oldalára felmérjük az a, b szakaszokat; legyen a két végpont D, ill. E, továbbá az OC_1 félegyenesnek k_a-n levő pontja F. Párhuzamost húzunk E-n át OD-vel és DF-fel; legyen az OC_1-gyel való metszéspontjuk O_1 ill. F_1. Ekkor az O_1 körül O_1F_1 sugárral írt kör k_1, ennek k_b-vel való metszéspontja B_2, a keresett szelő C_1B_2, és ebből A_1-et a D-n átmenő, EB_2-vel párhuzamos egyenes metszi ki.

Ugyanis C_1 szétválasztja a D, E, az O, O_1 és az F, F_1 pontpárokat, ezért az EO_1 és DO, valamint EF_1 és DF félegyenesek ellentétes irányúak, tehát az O_1EF_1 és ODF szögek váltószögek, továbbá a C_1EO_1 és C_1DO, valamint C_1EF_1 és C_1DF hasonló helyzetű háromszög párokból

$$EO_1 : DO = b : a = EF_1 : DF.$$

Így az O_1EF_1 és ODF háromszögek hasonlóságából $O_1F_1 : OF = b : a$, másrészt $O_1C_1 : OC_1 = b : a$, tehát az O_1 körül O_1F_1 sugárral írt kör valóban a fenti k_1. Továbbá a C_1DA_1 háromszög hasonló C_1EB_2-höz, ezért $C_1A_1 : C_1B_2 = C_1D : C_1E = a : b$, tehát A_1, mint a k_1-en levő B_2-nek megfelelője a fenti forgatva nyújtás megfordításában, rajta van k_a-n. (Ezt tudva a végrehajtás DA_1 egyenese mellőzhető.)

A B_2 metszéspont létrejön, ha az OB_2, OO_1 és O_1F_1 szakaszokból lehet háromszöget szerkeszteni. Mármost $OO_1 = OC_1 + C_1O_1 = r_c + br_c/a = (a+b)r_c/a$, másrészt $O_1F_1 = br_a/a$, ezért – a-t és b-t csupán arányszámoknak tekintve és mindhárom szakaszt a-val szorozva – az

$$ar_b, \quad br_a, \quad (a+b)r_c \tag{1}$$

szakaszoknak kell a háromszög–egyenlőtlenséget teljesíteniük.

Ha valódi háromszög jön létre, akkor k_1 2 pontban metszi k_b-t, de a két megoldás nem lényegesen különböző, mert OC_1-re, mint tengelyre tükrösek. Ha a háromszög egyenes szakasszá fajul el, akkor k_1 érinti k_b-t, tehát B_2 az OC_1-en adódik.

Azonban B_2 csak akkor lesz a szelőnek és k_b-nek C_1-től (és A_1-től) távolabbi, C_1-ből „nem látható” metszéspontja, ha a k_c-hez C_1-ben húzott érintőnek azon az oldalán van, mint O, más szóval az O_1-gyel ellentétes oldalon. Kell tehát, hogy az érintő és k_b metszéspontját G-vel jelölve $O_1G^2 < O_1B_2^2$, azaz

$$C_1O_1^2 + C_1G^2 = C_1O_1^2 + OG^2 - OC_1^2 < O_1F_1^2, \quad \text{vagyis}$$

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot r_c^2 + r_b^2 - r_c^2 < \frac{b^2}{a^2} \cdot r_a^2. \tag{2}$$

Ha (1) fennáll, de (2) nem, akkor k_1 és k_b metszéspontja a B_1 szerepét játssza.

Gálfi László (Budapest, I. István Gimn. III. o. t)

Megjegyzések. 1. Kiindulásul A_1-et vagy B_2-t rögzítve lényegében ugyanilyen szerkesztéssel érünk célhoz. – (2) így is írható:

$$\frac{r_b^2 - r_c^2}{r_a^2 - r_c^2} < \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{C_1G}{C_1H} < \frac{b}{a},$$

ahol H a felhasznált érintőnek k_a-val való metszéspontja. Ehhez szemlélet útján is eljuthatunk. A keresett szelő i irányát megválasztva induljunk ki az O-n átmenő i irányú szelőből, majd távolítsuk ezt O-tól mindaddig, amíg van közös pontja k_c-vel, vagyis míg érinti k_c-t. Eközben – a szemlélet szerint – A_1C_1 állandóan növekszik és legnagyobb értéke az érintő helyzetben HC_1, viszont C_1B_2 állandóan csökken és legkisebb értéke a véghelyzetben C_1G. Ezek szerint, ha van megoldás, akkor a számlálót csökkentve, majd a nevezőt növelve a hányados értéke mindkét lépésben kisebbnek adódik, tehát

$$\frac{b}{a}=\frac{C_1B_2}{A_1C_1}>\frac{C_1G}{A_1C_1}>\frac{C_1G}{HC_1}.$$

Knuth Előd (Budapest, I. István Gimn. IV. o. t.)

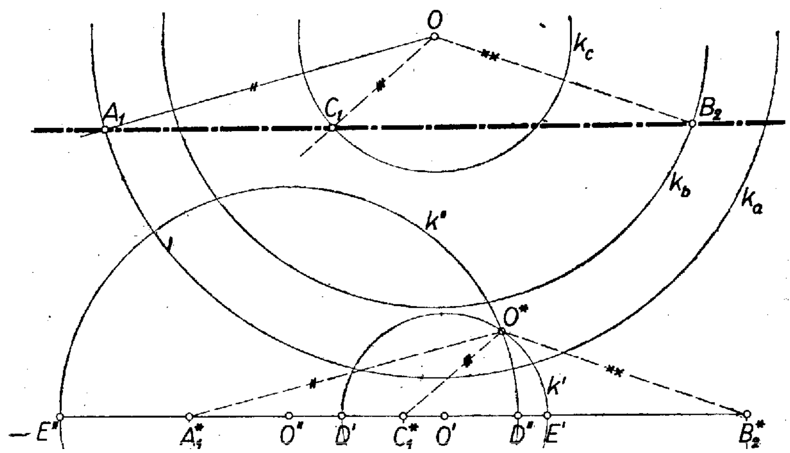
2. Ugyaninnen adódik, hogy C_1B_2 legnagyobb értéke r_c+r_b, A_1C_1 legkisebb értéke r_a-r_c, tehát B_2 létrejövésének feltétele

$$\frac{b}{a}<\frac{r_c+r_b}{r_a-r_c},\quad \text{amiből}\quad br_a-ar_b<(a+b)r_c.$$

Ezzel lényegében (1)-et ismételtük meg. Ugyanis a háromszög–egyenlőtlenség másik részét mellőzhetjük, hiszen az ar_b és br_a „oldalak” összege $r_a>r_b>r_c$ folytán nagyobb a harmadik oldalnál:

$$ar_b+br_a>ar_c+br_c=(a+b)r_c.$$

II. megoldás. Mérjük fel – köreink síkjában bárhol – az $A_1^*C_1^*=a$ szakaszt, ennek meghosszabbítására a $C_1^*B_2^*=b$ szakaszt és keressünk olyan O^* pontot, hogy az A_1^*, C_1^*, B_2^*, O^* pontnégyes hasonló legyen a keresett A_1, C_1, B_2, O pontnégyeshez.



Ez fennáll ha

$$\frac{O^*A_1^*}{O^*C_1^*}=\frac{OA_1}{OC_1}=\frac{r_a}{r_c}=\lambda' \quad \text{és} \quad \frac{O^*C_1^*}{O^*B_2^*}=\frac{OC_1}{OB_2}=\frac{r_c}{r_b}=\lambda''.$$

Ismeretes, hogy e feltételeknek (külön–külön) eleget tevő O^* pontok mértani helye egy–egy kör, pl. az első feltételre nézve az A_1^* és C_1^* alappontokhoz és a $\lambda'(\neq 1)$ aránymutatóhoz tartozó ún. Apollóniosz–kör, melynek egy $M'N'$ átmérőjét az $A_1^*C_1^*$ egyenesnek azok az M', N' pontjai tűzik ki, melyekre

$$(3)\qquad A_1^*M':M'C_1^*=A_1^*N':N'C_1^*=\lambda' \text{ és } A_1^*M'+M'C_1^*=A_1^*N'-C_1^*N'=A_1^*C_1^*.$$

Az M' belső osztópont az $A_1^*C_1^*$ szakaszon, az N' külső osztópont pedig $\lambda'>1$ miatt a $C^*B_2^*$ félegyenesen van. (Hasonlóan a $C_1^*B_2^*$ szakasz külső osztópontja a $C_1^*A_1^*$ félegyenesen van, mert $0<\lambda''<1$. A kör középpontja ugyancsak a $C_1^*B_2^*$ félegyenesen van.)

E két kör megszerkeszthető, egyik közös pontjuk megfelel O^* gyanánt. Ennek alapján egy megfelelő A_1, C_1 pontpárt azok az O-ból kiinduló félegyenesek metszenek ki k_a, ill. k_c-ből, amelyek párhuzamosak és egyirányúak az $O^*A_1^*$, ill. $O^*C_1^*$ félegyenessel, a szelőt pedig A_1 és C_1 összekötésével kapjuk.

A szerkesztés helyességének bizonyítását az olvasókra bízzuk. A diszkusszióhoz is csak megjegyezzük, hogy O^* létrejön, ha mindegyik külső osztópont kívül esik a másik körön, vagy a kerületén van. A sorrend akkor lesz megfelelő, ha az $O^*C_1^*A_1^*$ szög nem hegyesszög, vagyis $O^{*2}A_1^*\geq O^*C_1^{*2}+A_1^*C_1^{*2}$. Lényegében 1, vagy 0 megoldás van.

Nováky Béla (Budapest, I. István Gimn. III. o. t.)

Megjegyzés. A szerkesztés egy egyszerű végrehajtása: A_1^*, C_1^*, B_2^*-tól a rajtuk át húzott tetszés szerinti irányú párhuzamos egyenesekre az $A_1^*C_1^*$ egyenes egyik oldalán felmérjük r_a-t, r_c-t, r_b-t, továbbá a C_1^*-on átmenő egyenes másik oldalára is r_c-t. A végpontokat A', C', B', C''-vel jelölve a fenti M', N', M'', N'' osztópontokat $A_1^*C_1^*$-ból rendre az $A'C''$, $A'C'$, $B'C''$, $B'C'$ egyenesek metszik ki.